LITERATURA

1. **Štefan Adamič. Temelji Biostatistike.** Medicinska fakulteta, 1989. Cena = 5€.
2. Kakšna angleška knjiga, na primer: **Martin Bland. An Introduction to Medical Statistics.** Oxford University Press, 2000.
3. Katarina Košmelj. Uporabna statistika.

   http://www.bf.uni-lj.si/fileadmin/groups/2721/Uporabna_statistika_okt_2007/Uporabna_statistika_01.pdf

OBVEZNOSTI

1. Vaje (izdelki, domača naloga)
2. Kolokvij (velja do smrti - čigave?) ali pozneje izpit.

PREDSODKI O STATISTIKI IN STATISTIKIH

PREDSODKI O STATISTIKI IN STATISTIKIH

V povprečju so moji študenti zelo dobri. Polovica jih misli, da je $2 + 2 = 3$, polovica pa, da je $2 + 2 = 5$.

PREDSODKI O STATISTIKI IN STATISTIKIH

V povprečju so moji študenti zelo dobri. Polovica jih misli, da je $2 + 2 = 3$, polovica pa, da je $2 + 2 = 5$.

Velika večina ljudi ima nadpovprečno število nog.

PREDSODKI O STATISTIKI IN STATISTIKIH

V povprečju so moji študenti zelo dobri. Polovica jih misli, da je $2 + 2 = 3$, polovica pa, da je $2 + 2 = 5$.

Velika večina ljudi ima nadpovprečno število nog.

Statistik je človek, ki ne verjame, da je Kolumb odkril Ameriko, ker tega ni bilo v načrtu raziskave.

PREDSODKI O STATISTIKI IN STATISTIKIH

V povprečju so moji študenti zelo dobri. Polovica jih misli, da je $2 + 2 = 3$, polovica pa, da je $2 + 2 = 5$.

Velika večina ljudi ima nadpovprečno število nog.

Statistik je človek, ki ne verjame, da je Kolumb odkril Ameriko, ker tega ni bilo v načrtu raziskave.

USA Today has come out with a new survey - apparently, three out of four people make up 75 percent of the population. - *David Letterman*

Po drugi strani pa . . .

It’s amazing how authoritative you can sound just by quoting some statistics . . .

In prav gotovo

Without data it is anyone's opinion . . .

(In God we trust. All others must bring data).

Doctors are often unable to explain exactly why one person gets cancer and another doesn't. The researchers speculate that "a diet rich in refined cereals and poor in vegetables may have an unfavorable role on RCC [renal cell carcinoma]."

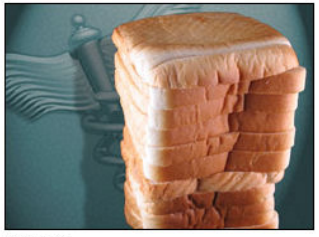
Study Links Bread, Kidney Cancer Risk
Those Without Kidney Cancer Ate More Vegetables And Less Bread

http://www.cbsnews.com/stories/2006/10/20/health/webmd/main2111478.sh

Study Links Bread, Kidney Cancer Risk

Those Without Kidney Cancer Ate More Vegetables And Less Bread

Oct. 20, 2006



(CBS/AP)

Double-click any word (What's this?)

(WebMD) An Italian study shows that people with renal cell carcinoma, the most common type of kidney cancer, may eat more bread and fewer vegetables than those without kidney cancer.

But the study, published online in the International Journal of Cancer, doesn't claim bread causes kidney cancer.

The researchers included Francesca Bravi, M.D., of the Istituto di Ricerche Farmacologiche "Mario Negri" in Milan.

Between 1992 and 2004, Bravi's team interviewed 767 patients with renal cell carcinoma at Italian hospitals. They also interviewed 1,534 patients without kidney cancer. Patients completed surveys about their diets during the previous two years. The questions covered 78 foods and beverages.

The findings show renal cell carcinoma patients were more likely than those without kidney cancer to have the highest intake of bread, and, to a lesser extent, pasta and rice. People without renal cell carcinoma were more likely to eat the greatest amount of vegetables, poultry, and processed meats.

The researchers found no association between renal cell carcinoma and coffee, tea, soups, eggs, red meat, fish, cheese, potatoes, fruit, desserts, or sugars.

The results take into account other factors, such as family history of kidney cancer, smoking, and alcohol use. However, the study doesn't prove any particular dietary pattern causes or prevents renal cell carcinoma.

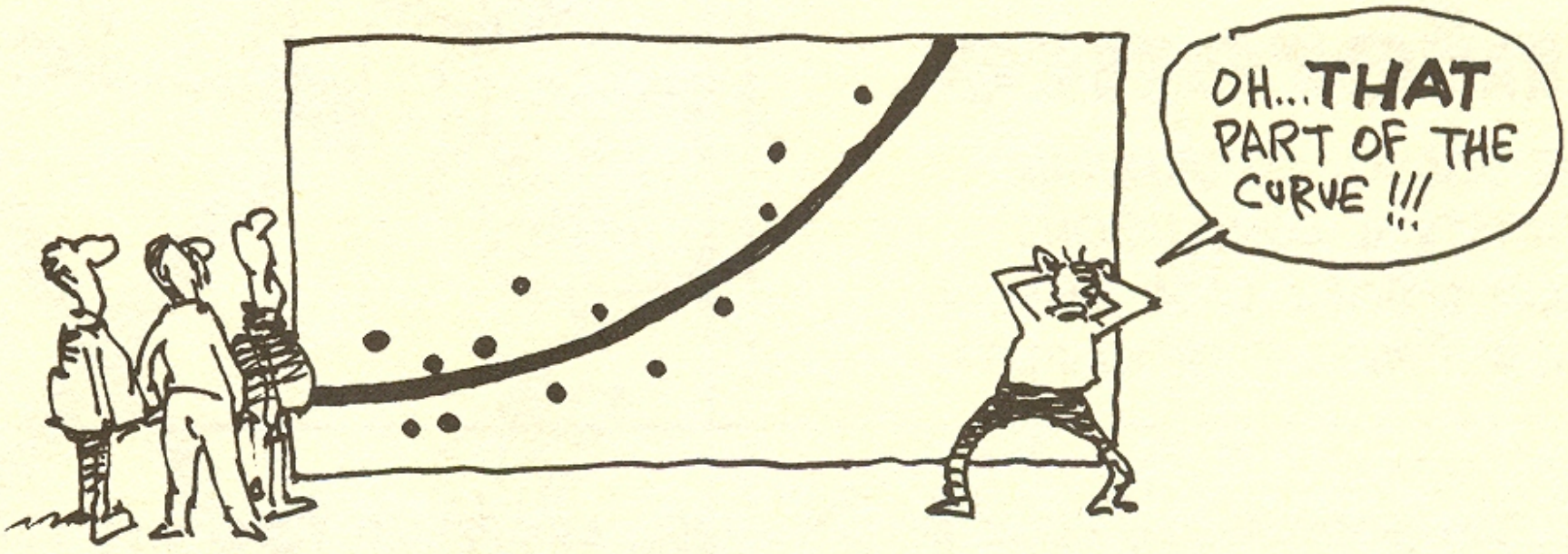
Doctors are often unable to explain exactly why one person gets cancer and another doesn't. The researchers speculate that "a diet rich in refined cereals and poor in vegetables may have an unfavorable role on RCC [renal cell carcinoma]."

RELATED

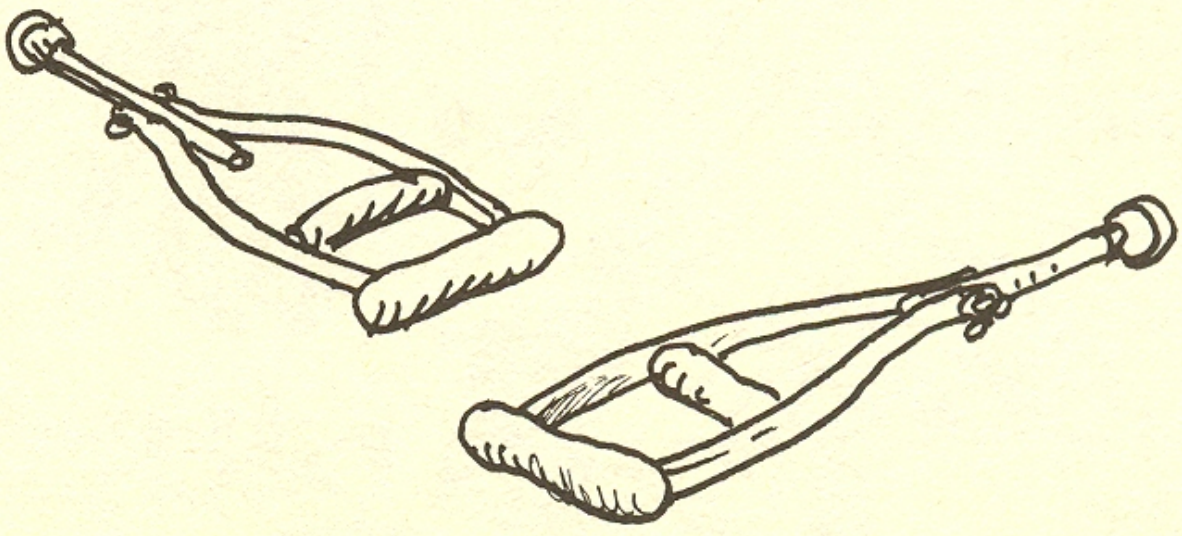
INTERACTIVE
Diet And Nutrition
Are you eating right? See the government's guidelines, calculate your body mass index and quiz yourself on healthy food choices.

INTERACTIVE
Food Pyramid
The government's latest guidelines for healthy eating get personal.

FOR EXAMPLE, IN 1986, THE SPACE SHUTTLE *CHALLENGER* EXPLODED, KILLING SEVEN ASTRONAUTS. THE DECISION TO LAUNCH IN 29-DEGREE WEATHER HAD BEEN MADE WITHOUT DOING A SIMPLE ANALYSIS OF PERFORMANCE DATA AT LOW TEMPERATURE.



A MORE POSITIVE EXAMPLE IS THE *SALK POLIO VACCINE*. IN 1954, VACCINE TRIALS WERE PERFORMED ON SOME 400,000 CHILDREN, WITH STRICT CONTROLS TO ELIMINATE BIASED RESULTS. GOOD STATISTICAL ANALYSIS OF THE RESULTS FIRMLY ESTABLISHED THE VACCINE'S EFFECTIVENESS, AND TODAY POLIO IS ALMOST UNKNOWN.



STATISTIKA IN MEDICINA

STATISTIKA IN MEDICINA

- **Evidence-based medicine** (z dokazi podprta medicina) - novo geslo na vseh področjih medicine. Ta zahteva zbiranje ‘dokazov’ (evidence) in njihovo kritično interpretiranje.

STATISTIKA IN MEDICINA

- **Evidence-based medicine** (z dokazi podprta medicina) - novo geslo na vseh področjih medicine. Ta zahteva zbiranje ‘dokazov’ (evidence) in njihovo kritično interpretiranje.
- Temeljno orodje za zbiranje, analizo in evalvacijo podatkov je **statistika**.

STATISTIKA IN MEDICINA

- **Evidence-based medicine** (z dokazi podprta medicina) - novo geslo na vseh področjih medicine. Ta zahteva zbiranje ‘dokazov’ (evidence) in njihovo kritično interpretiranje.
- Temeljno orodje za zbiranje, analizo in evalvacijo podatkov je **statistika**.
- Slaba statistika $\rightarrow$ slabo raziskovanje $\rightarrow$ to je neetično (napačni rezultati, dobro zdravljenje opuščeno, slabo sprejeto, nesmiselno izpostavljanje bolnikov, ...).

STATISTIKA IN MEDICINA

- **Evidence-based medicine** (z dokazi podprta medicina) - novo geslo na vseh področjih medicine. Ta zahteva zbiranje ‘dokazov’ (evidence) in njihovo kritično interpretiranje.
- Temeljno orodje za zbiranje, analizo in evalvacijo podatkov je **statistika**.
- Slaba statistika $\rightarrow$ slabo raziskovanje $\rightarrow$ to je neetično (napačni rezultati, dobro zdravljenje opuščeno, slabo sprejeto, nesmiselno izpostavljanje bolnikov, ...).
- Medicina se hitro spreminja, zdravnik se mora odločiti o vrsti zdravljenja na osnovi objavljenih študij. Poznavanje statistike je pri tem presneto koristno.

STATISTIKA IN MEDICINA

- **Evidence-based medicine** (z dokazi podprta medicina) - novo geslo na vseh področjih medicine. Ta zahteva zbiranje ‘dokazov’ (evidence) in njihovo kritično interpretiranje.
- Temeljno orodje za zbiranje, analizo in evalvacijo podatkov je **statistika**.
- Slaba statistika $\rightarrow$ slabo raziskovanje $\rightarrow$ to je neetično (napačni rezultati, dobro zdravljenje opuščeno, slabo sprejeto, nesmiselno izpostavljanje bolnikov, ...).
- Medicina se hitro spreminja, zdravnik se mora odločiti o vrsti zdravljenja na osnovi objavljenih študij. Poznavanje statistike je pri tem presneto koristno.
- Prava zgodovina (čast izjemam) statistike v medicini se začne v sredini 20. stoletja. (Bradford Hill, Richard Doll).

Top 11 contributions to medicine over the millennium (NEJM, 2000)

Elucidation of Human Anatomy and Physiology

Discovery of Cells and Their Substructures

Elucidation of the Chemistry of Life

Application of Statistics to Medicine

Development of Anaesthesia

Discovery of the Relation of Microbes to Disease

Elucidation of Inheritance and Genetics

Knowledge of the Immune System

Development of Body Imaging

Discovery of Antimicrobial Agents

Development of Molecular Pharmacotherapy

Top 11 contributions to medicine over the millennium (NEJM, 2000)

Elucidation of Human Anatomy and Physiology

Discovery of Cells and Their Substructures

Elucidation of the Chemistry of Life

Application of Statistics to Medicine

Development of Anaesthesia

Discovery of the Relation of Microbes to Disease

Elucidation of Inheritance and Genetics

Knowledge of the Immune System

Development of Body Imaging

Discovery of Antimicrobial Agents

Development of Molecular Pharmacotherapy

The New England Journal of Medicine

Established in 1812 as The New England Journal of Medicine and Surgery

VOLUME 342 JANUARY 6, 2000 NUMBER 1

ORIGINAL ARTICLES

IMAGES IN CLINICAL MEDICINE

REVIEW ARTICLE

CLINICAL PROBLEM-SOLVING

EDITORIALS

CORRESPONDENCE

lished by the Massachusetts Medical Society and printed in England (Andover) Ltd., West Portway, Andover, SP10 3SF, U.K.
d as a newspaper at the Post Office. ISSN 0028-4793.

Editorials

Looking Back on the Millennium in Medicine

THE second millennium is over. The editors of the *Journal* first thought to ignore this passage. After all, the changing of the millennium would undoubtedly be the subject of incessant media attention. Why should we add to it? Yet, looking back, it is hard not to be moved by the astounding course of medical history over the past thousand years. No one alive in the year 1000 could possibly have imagined what was in store. Furthermore, medicine is one of the few spheres of human activity in which the purposes are unambiguously altruistic — in itself, a remarkable achievement.

We therefore decided to yield to the temptation to comment on the end of the second millennium by choosing the most important medical developments of the past thousand years and reviewing them briefly. None of the developments we selected was an isolated discovery or event; instead, each was a series of notable steps — some huge, some smaller — along a path that led to a crucial body of knowledge in a particular area. That is the usual way medical science progresses. For example, Vesalius took giant steps toward elucidating human anatomy, but he was not alone, and what was important was the totality of the work in that area.

We deliberately restricted ourselves to developments that changed the face of clinical medicine, not preventive medicine or public health or health care delivery or medical ethics. Yet there is obviously overlap. Understanding the relation of microbes to disease, for example, inevitably affected not only clinical medicine, but also preventive medicine and public health. Indeed, it is hard to think of a more important advance in all three arenas than immunization. Medical ethics has become increasingly important as the power of clinical medicine grows, but we arbitrarily decided not to include that topic here.

Except for some early work by the ancient Greeks, much of it wrong, there were few advances in clinical medicine until the Renaissance. In the 1400 years between Galen and Vesalius, medicine was stagnant, dominated by the belief that illness reflected an imbalance in the four humors of the body — blood, phlegm, yellow bile, and black bile. Life was nasty, brutish, and short, and medical care did not help. There are many reasons little progress was made until the Renaissance, but one of them was surely that the only fit pursuit for scholars in those centuries was considered to be knowledge of God, not of man. Only with the flowering of humanism that characterized the Renaissance did that change, and it changed very rapidly.

Readers will note that the developments we discuss were the work largely of white men in Europe and North America. For a variety of reasons, that is the way it was. In the new millennium, it will be different. That is one prediction we make with confidence. The other is that the pace of change will continue to accelerate, as it did in the second millennium. Beyond this, it would be foolhardy to speculate about what the new millennium holds, just as it would have been impossible for anyone in the year 1000 to dream of everything that was to come.

Here, then, we present our choices for the most important medical developments of the past millennium. In what may be our only claim to distinction in the process, we arbitrarily chose 11, not 10. Obviously, many more could have been selected. We present them not in order of importance, but in rough chronologic order according to the first noteworthy step taken in a given area.

Elucidation of Human Anatomy and Physiology

The emergence of a comprehensive understanding of the structure and function of the organ systems of the human body stands — without question — as one of the most influential advances of the past millennium. Although the contributions of the Greek physician Galen early in the first millennium A.D. were extraordinarily important to anatomy and physiology, Galen also introduced numerous errors that were not corrected until the Renaissance. Perhaps the greatest anatomist of the Renaissance, if not of all time, was Andreas Vesalius (1514–1564), born in Brussels but educated in France and Italy. Vesalius's anatomical treatise, *De Humani corporis fabrica libri septem* ("Seven Books on the Structure of the Human Body"), published in 1543, is regarded as one of the most important works in medicine. The extraordinary illustrations in the *Fabrica* (not actually drawn by the great anatomist but by an unknown artist) set a new standard for the understanding of human anatomy.

Less than 100 years after Vesalius, William Harvey (1578–1657), an English physician and physiologist, established that the blood circulates within a closed system, with the heart serving as a pump. He showed that the pulse results from the filling of arteries with blood after cardiac contraction and that the right ventricle pumps blood to the pulmonary circulation and the left ventricle pumps blood to the systemic circulation. The importance of Harvey's work, published in 1628 in *Exercitatio anatomica de motu cordis et sanguinis in animalibus* ("On the Motion of the Heart and Blood in Animals"), cannot be overstated. The physiologic principles that he established led to an un-

From the standpoint of medical practice, the growth of knowledge about the inorganic composition of body fluids is probably just as important as the amassing of knowledge about the organic chemistry of cells. The relation of sodium to edema or dehydration, the importance of potassium in the losses incurred in diarrhea, the distribution of water in the body, and the implications of the disturbances in acid–base balance that accompany vomiting, circulatory shock, uremia, or uncontrolled diabetes — all were clarified during the past hundred years and have become part of the basic knowledge required by doctors in every specialty for the delivery of good medical care.

APPLICATION OF STATISTICS TO MEDICINE

A natural starting point for a history of biostatistical thought in the past millennium is the work of Leonardo Fibonacci (c. 1170– after 1240), an Italian mathematician of the Middle Ages. By introducing Indian and Arabic mathematics and numbering to Europe in 1202, he freed Western thought from the limitations of the Roman-numeral system. This advance laid the foundation for modern computation and bookkeeping. Probability theory emerged only in the 16th and 17th centuries, when Pierre de Fermat (1601–1665) and Blaise Pascal (1623–1662) developed basic probabilistic calculations to analyze games of chance. Ideas of relative frequency were first applied to mortality statistics in 17th-century London at the time of the plague. John Graunt (1620–1674) introduced the notion of inference from a sample to an underlying population and described calculations of life expectancy that launched the insurance industry in the 17th and 18th centuries.

The German mathematician Karl Friedrich Gauss (1777–1855) played a central part in the development of modern statistical reasoning. His method of least-squares analysis, developed around 1794, underlies much of modern regression analysis. Thomas Bayes (1702–1761), the 18th-century English theologian and mathematician, was the first to show how probability can be used in inductive reasoning.

One of the earliest clinical trials took place in 1747, when James Lind treated 12 scorbutic ship passengers with cider, an elixir of vitriol, vinegar, sea water, oranges and lemons, or an electuary recommended by the ship's surgeon. The success of the citrus-containing treatment eventually led the British Admiralty to mandate the provision of lime juice to all sailors, thereby eliminating scurvy from the navy. The origin of modern epidemiology is often traced to 1854, when John Snow demonstrated the transmission of cholera from contaminated water by analyzing disease rates among citizens served by the Broad Street Pump in London's Golden Square. He arrested the further spread of the disease by removing the pump handle from the polluted well.

Biostatistical reasoning developed rapidly in Great Britain in the late 19th and early 20th centuries. Sir Ronald Fisher (1890–1962), the most important figure in modern statistics, developed the analysis of variance and multivariate analysis. He also introduced the principle of randomization as a method for avoiding bias in experimental studies. In the United States, Jerzy Neyman, a Russian immigrant, developed the theories of estimation and testing that shaped contemporary biostatistical practice.

A landmark of quantitative observational research as a tool for exploring the determinants of disease was Sir Richard Doll's study of smoking among British physicians. Randomized clinical trials emerged in England in the 1950s and were adopted by the National Institutes of Health in the United States in the early 1960s; there followed an explosion of clinical trials of treatment for cancer, heart disease, diabetes, and other diseases. Biostatistical methods expanded rapidly during this period. Sir David Cox's 1972 paper on proportional-hazards regression ignited the fields of survival analysis and semiparametric inference (using partial specification of the probability distribution of the outcomes under investigation). Rapid improvements in computer support were essential to the growing role of empirical investigation and statistical inference.

DEVELOPMENT OF ANESTHESIA

Archeological evidence makes it clear that surgery was practiced in the form of trephination of the skull well before recorded history. Some who suffered through the procedure even survived it. Written records from ancient Greece, Egypt, and China refer to the use of opium, cannabis, and mandragora (mandrake) to produce anesthesia, analgesia, and amnesia. It is clear, however, that for most of recorded history surgical procedures were crude, quick, and agonizing. Surgery was a fearsome treatment of last resort, rarely used. The development of anesthesia was the essential prelude to modern surgery.

The European scientific establishment laid the groundwork for the development of surgical anesthesia. In 1799, Sir Humphry Davy, the superintendent of the Pneumatic Institution in Clifton, England, recognized the analgesic properties of nitrous oxide when he inhaled it, during the course of his work, while he had a toothache. He coined the term "laughing gas" but carried the work no further.

Ether had been known to chemists since the 18th century, and chloroform was discovered in 1831, but the medical applications of inhaled agents to relieve the pain of surgery came about only after Horace Wells, a Connecticut dentist, used nitrous oxide to anesthetize 15 patients during December 1844. Flush with success, Wells persuaded his former partner, William Morton, to arrange a public exhibition of nitrous oxide anesthesia for a dental extraction at the Massachusetts General Hospital. The demonstration, in January 1845, was a disaster. The patient cried out in pain,

UVOD

Primer: Spoznajte svojo babico

- Ista babica v prenatalni negi, pri porodu in postanatalni negi (SSB).
- SSB so primerjali s standardno nego v randomiziranem poskusu (SSB ali kontrola). Če je izbor padel na SSB, je bila ponujena možnost izbire.

Način poroda	Sprejele SSB		Odklonile SSB		Kontrole	
	%	n	%	n	%	n
normalen	80,7	352	69,8	30	74,8	354
inštrumenti	12,4	54	14	6	17,8	84
carski rez	6,9	30	16,3	7	7,4	35

Vprašanja

1. Ženske so vedele, kakšno uslugo bodo imele. Ali to lahko vpliva na izid poskusa?
2. Kako primerjati SSB s kontrolami?
3. Ali je etično randomizirati, ne da bi ženske za to vedele?

Primer: Starost matere in porodna teža otroka

Vprašanje:

Ali starost matere vpliva na porodno težo otroka?

Naloga:

Načrtuj raziskavo, ki bo odgovorila na zastavljeno vprašanje!

Možna rešitev:

Oglejmo si populacijo otrok, rojenih ob roku, katerih matere so bile ob porodu stare 35 let. Porodno težo teh otrok lahko primerjamo s porodno težo vseh slovenskih ob roku rojenih otrok.

Recimo, da je znano, da je povprečna porodna teža otrok v Sloveniji 3348 gramov.

Vprašanje sedaj postavimo takole: Ali je povprečna porodna teža otrok, ki so jih rodile 35-letne matere, različna od 3348 gramov?

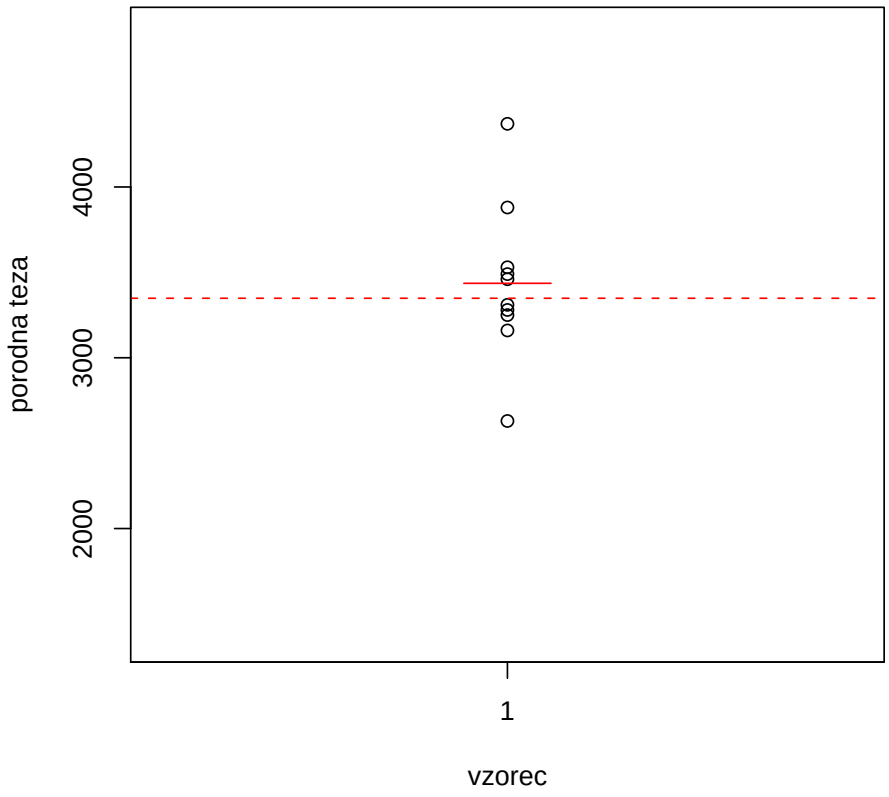
Opomba: Možne so boljše študije!

Populacija, ki nas zanima, so torej novorojenčki, ki so jih rodile 35-letne Slovenke. Vkolikor nimamo registra vseh porodov (v Sloveniji ga imamo!), je seveda nemogoče izmeriti porodne teže otrok vseh 35-letnic v danem obdobju. Zato izberemo le vzorec, recimo 10 takšnih novorojenčkov. Dobimo naslednje vrednosti (v gramih):

3310, 3880, 3460, 3490, 3160, 3250, 2630, 4370, 3530, 3280.

Povprečje teh vrednosti je 3436, povprečje vseh slovenskih otrok (v resnici gre za povprečje nekaj čez 6000 porodov v ljubljanski regiji v določenem letu) pa je 3348 gramov.

Na naslednji sliki so posamezne vrednosti v vzorcu, njihovo povprečje (kratka neprekinjena črta) in povprečje populacije.

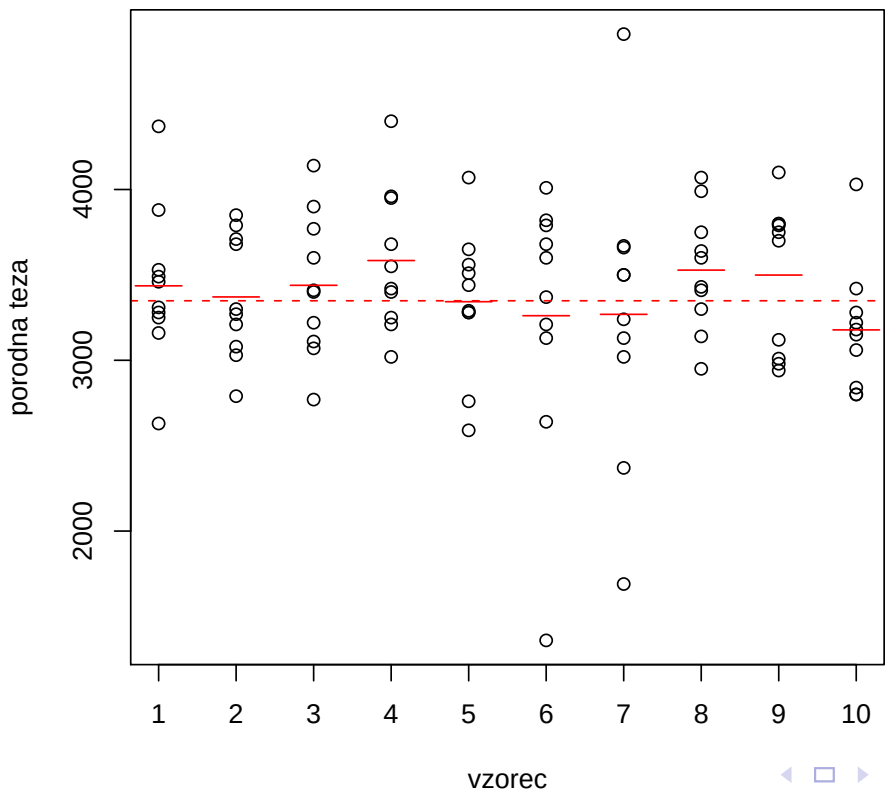


Kljub temu, da so vse matere enako stare, se porodne teže otrok razlikujejo, kar predvsem pripisujemo biološki variabilnosti. Za nas pomembno vprašanje pa je tole:

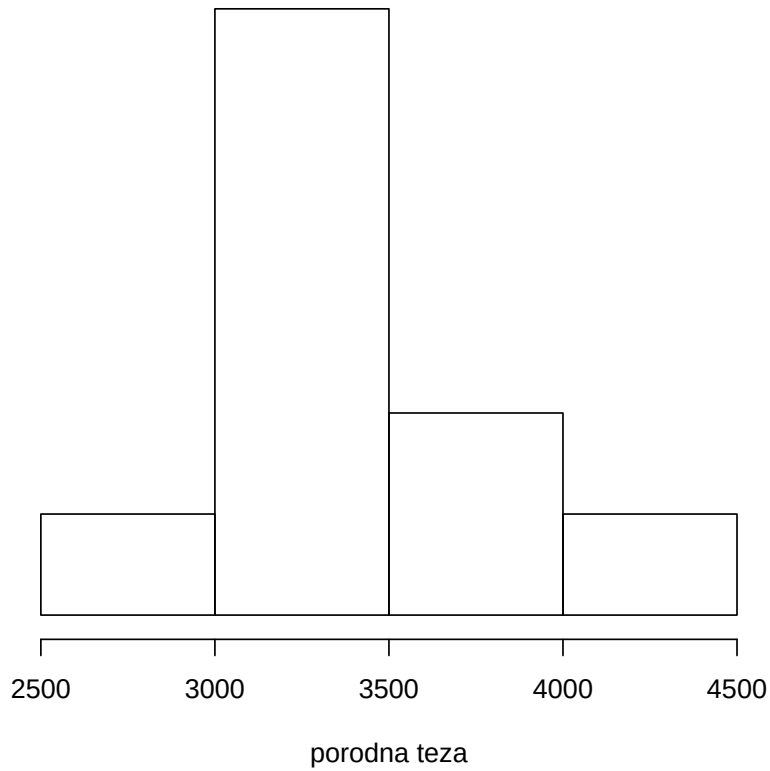
Ali je opažena razlika med povprečjema vzorca in populacije prava (sistematična), ali pa gre le za naključno variabilnost?

Recimo, da je še 9 raziskovalcev naredilo isto, torej izmerilo porodno težo desetih otrok, ki so se rodili 35-letnim materam.

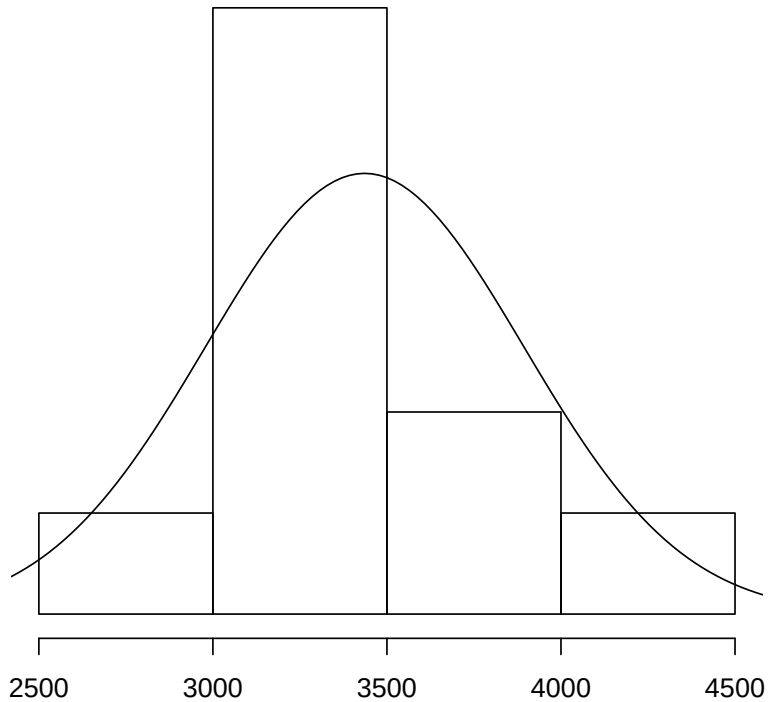
Na spodnji sliki je teh 9 vzorcev dodano prvemu vzorcu. Vzorčna povprečja se očitno razlikujejo. Vendar, vsa se zdijo dovolj blizu populacijskemu povprečju. Smiselno je sklepati, da je povprečna porodna teža otrok 35-letnih mater enaka populacijski vrednosti.



V praksi večinoma ne bomo mogli primerjati svojih rezultatov z rezultati drugih. Da bi odgovorili na vprašanje o naključni razliki, bomo potrebovali teoretični model porazdelitve porodnih tež. Grafu spodaj rečemo **histogram**, prikazuje pa frekvenco (ali pa relativno frekvenco) vrednosti spremenljivke v določenih intervalih. Povedano drugače, histogram prikazuje porazdelitev vrednosti spremenljivke.



Pri samo desetih vrednostih je slika seveda precej groba. Če pa bi imeli mnogo več podatkov, bi bili intervali lahko zelo majhni in si lahko predstavljamo, da bi postali robovi histograma precej bolj gladki. Zaenkrat pač privzemimo nek model (o tem več pozneje) porazdelitve porodnih tež, ki ga ilustrira naslednja slika z vrisano teoretično porazdelitvijo.



Teoretično porazdelitev lahko uporabimo (kako? o tem spet kasneje) za to, da izračunamo verjetnost za vsaj tako veliko razliko, kot smo jo opazili. Ugotovljena razlika je bila 3436 - 3348 = 88 gramov in teorija pravi, da bi vsaj tako veliko razliko dobili v 63% primerov, torej da je verjetnost vsaj tako velike razlike 0,63. Tej verjetnosti pravimo stopnja tveganja oz. kar ***p*-vrednost**.

Sklep: Podatki ne nasprotujejo trditvi, da je povprečna porodna teža otrok 35-letnih mater enaka povprečju v populaciji. Naša raziskava torej govori o tem, da porodna teža otroka ni odvisna od starosti matere.

Uvodni primer ilustrira dejstvo, da so trditve v statistiki verjetnostne. Preden se torej lotimo statističnih metod, se nekoliko pomudimo pri osnovah verjetnosti.

OSNOVE VERJETNOSTI

Primer: V porodnišnici se je v določenem letu rodilo 1756 otrok, od tega 901 deček.

Frekvenca dečkov je 901, **relativna frekvenca** dečkov pa 901/1756 = 0,513.

Opazimo:

- Relativna frekvenca leži med 0 in 1.
- Relativno frekvenco izračunamo iz podatkov, je torej ugotovljena (izmerjena, opažena) vrednost.

Osnovna pojma verjetnosti sta **poskus** in **dogodek**. O poskusu govorimo, kadar se neka množica dejstev vedno pojavi hkrati. Dogodek pa je pojav, ki se v poskusu lahko zgodi, a to ni nujno. V gornjem primeru je poskus porod, dogodek pa, da se rodi deček.

'Definicija' verjetnosti

Verjetnost je tista vrednost, pri kateri se stabilizira relativna frekvenca dogodka v velikem številu poskusov.

Gornja definicija ni matematično korektna, a bo za našo rabo zadoščala.

Spodnja tabela prikazuje število porodov v Sloveniji v letih 1991 do 1995. Vidimo, da se relativne frekvence dečkov gibljejo okrog 0,51, kar bi bilo nekako smiselno vzeti za verjetnost rojstva dečka.

Leto	1991	1992	1993	1994	1995
Porodov skupaj	21583	19982	19793	19463	18980
Dečki	11116	10333	10188	9899	9741
Deklice	10467	9649	9605	9564	9239
Relativna frekvenca	0,515	0,517	0,514	0,508	0,513

Notacija:

Dogodke bomo označevali z velikimi tiskanimi črkami, na primer

Pri metu kocke	$A = \{\text{izid je sodo število}\}$
Ob rojstvu	$B = \{\text{novorojenček je deček}\}$
Gestacijska starost	$C = \{\text{tednov nosečnosti} \geq 37\}$

Verjetnost dogodka A bomo označevali s $P(A)$. Seveda za vsak dogodek A velja

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Še nekaj definicij

AB ali $A \cap B$	(A krat B) je dogodek, ki se zgodi, kadar se zgodita A in B. Temu dogodku rečemo **produkt** dogodkov.
$A \cup B$	(A ali B) je dogodek, ki se zgodi, kadar se zgodi A ali B. Govorimo o **vsoti** dogodkov.
$A - B$	**razlika** se zgodi, če se zgodi A in ne zgodi B.
$\bar{A}$	(**ne** A) je dogodku A nasproten dogodek.

Če se vedno, ko se zgodi A, zgodi tudi B, pravimo, da je A **način** dogodka B in pišemo $A \subset B$. Rečemo tudi, da je A **vsebovan** v B.

Dogodek, ki se vedno zgodi, imenujemo **gotov** dogodek in ga ponavadi zaznamujemo s črko G. Njemu nasproten je dogodek, ki se nikoli ne zgodi in mu rečemo **nemogoč** dogodek ter ga označimo z N.

Dogodka A in B sta **nezdružljiva**, če je njun produkt nemogoč dogodek. Torej kadar je $A \cap B = N$.

RAČUNANJE Z VERJETNOSTMI

a. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
b. $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$
c. $C \subset B \Rightarrow P(C) \leq P(B)$
d. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Primer:

$A = \{\text{gestacijska starost} \geq 40\}$
$\bar{A} = \{\text{gestacijska starost} < 40\}$
$B = \{\text{novorojenček je deklica}\}$

Formula b. potem pravi:

$P(\text{novorojenček je deklica}) =$
$\quad P(\text{novorojenček je deklica rojena v 40. tednu ali kasneje}) +$
$\quad P(\text{novorojenček je deklica rojena pred 40. tednom})$

in torej izraža preprosto dejstvo, da je

število novorojenih deklic $=$
$\quad$ število novorojenih deklic rojenih v ali po 40. tednu$+$
$\quad$ število novorojenih deklic rojenih pred 40. tednom.

Naredimo korak naprej. Naj bo:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{gestacijska starost} \leq 35\} \\ A_2 &= \{\text{gestacijska starost} = 36,37,38\} \\ A_3 &= \{\text{gestacijska starost} = 39,40,41\} \\ A_4 &= \{\text{gestacijska starost} \geq 42\} \\ B &= \{\text{novorojenček je deklica}\} \end{aligned}$$

Potem je

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + P(A_4 \cap B),$$

Zgornja formula velja zato, ker so dogodki A_1,A_2,A_3 in A_4 **paroma nezdružljivi** in **izčrpni** (pomeni, da skupaj predstavljajo vse mogoče dogodke v poskusu). Tako velja v splošnem:
Če so A_1,A_2,$\ldots$,A_m paroma nezdružljivi in izčrpni dogodki, potem je

$$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i \cap B)$$

Pogojna verjetnost

Primer: Za bolnika z rakom prostate bo verjetnost, da preživi 2 leti odvisna od tega, koliko je bila bolezen razširjena v času diagnoze. Ponavadi govorimo o štirih stadijih bolezni, označimo jih z I, II, III in IV.

Relativna frekvenca bolnikov, ki so živi po dveh letih in so bili v stadiju I potem **ni**

$$\frac{\text{število bolnikov, ki preživijo 2 leti}}{\text{število vseh bolnikov}}$$

ampak

$$\frac{\text{število bolnikov } \textbf{v stadiju I}\text{, ki preživijo 2 leti}}{\text{število vseh bolnikov } \textbf{v stadiju I}}$$

Delimo števec in imenovalec s skupnim številom bolnikov

$$\frac{\text{število bolnikov } \textbf{v stadiju I}\text{, ki preživijo 2 leti}/\text{število vseh bolnikov}}{\text{število vseh bolnikov } \textbf{v stadiju I}/\text{število vseh bolnikov}}$$

Z oznakami bomo zgornje izraze lažje prebrali. Naj bo:

A dogodek, da bolnik preživi 2 leti in
B dogodek, da je bolnik v stadiju I.

Berimo relativne frekvence kot verjetnosti in označimo s $P(A|B)$ **pogojno** verjetnost dogodka A glede na dogodek B, torej verjetnost, da se zgodi A, če se zgodi B. Potem zgornje relativne frekvence preberemo kot

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

kar vzemimo tudi za **definicijo pogojne verjetnosti**.

Primer: *Delež dečkov med novorojenčki*

V spodnji tabeli imamo relativne frekvence (v odstotkih) dečkov med novorojenčki. Vidimo, da je skupna relativna frekvenca dečkov 50,8% (verjetnost rojstva dečka torej 0,508), da pa se te spreminjajo glede na gestacijsko starost. Pogojna verjetnost rojstva dečka pri gestacijski starosti 35 tednov ali manj je na primer 0,532!

teden	št. dečkov	št. deklic	% dečkov
≤ 35	148	130	53,2
36	64	70	47,8
37	170	173	49,6
38	398	372	51,7
39	838	791	51,4
40	1163	1175	49,7
41	431	393	52,3
42	20	20	50,0
skupaj	3232	3124	50,8

Pogojna verjetnost je običajna verjetnost, definirana na novi, manjši množici dogodkov. Torej zanjo veljajo ista pravila za računanje, na primer

$$P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1.$$

Bayesova formula

Iz definicije pogojne verjetnosti preberemo, da je

$$P(AB) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

in odtod dobimo **Bayesovo formulo**

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

ter še

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}).$$

Neodvisnost

Dogodek A je neodvisen od dogodka B, če verjetnost dogodka A ni odvisna od verjetnosti dogodka B. Bolj formalno: A je neodvisen od B, kadar je

$$P(A) = P(A|B).$$

Neodvisnost pravzaprav pomeni, da B ne vsebuje nobene informacije o A.

Nekaj lastnosti

- Če je A neodvisen od B, je A neodvisen tudi od $\bar{B}$.
- Neodvisnost je simetrična relacija, zato lahko rečemo tudi "A in B sta neodvisna".
- Če sta A in B neodvisna, velja

$$P(A|B) = P(A|\bar{B}) = P(A) \quad \text{in}$$

$$P(B|A) = P(B|\bar{A}) = P(B).$$

- Če sta A in B neodvisna, velja

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Primer: *Met kocke*

Definirajmo dogodke

$$\begin{aligned} A &= \{2,4,6\} \\ B &= \{1,2,3,4\} \\ C &= \{1,2,3\} \end{aligned}$$

Seveda je

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

in tudi

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{2/6}{4/6} = \frac{1}{2}$$

in torej $P(A|B) = P(A)$. Se pravi, da sta A in B neodvisna.

Podobno bi ugotovili, da $P(A|C) \neq P(A)$ in s tem, da A in C nista neodvisna.

Primer: Rojstni dnevi

Vprašanje: Kolikšna je verjetnost, da imata med n ljudmi (med katerimi ni dvojčkov) vsaj dva na isti dan rojstni dan?

Primer: Rojstni dnevi

Vprašanje: Kolikšna je verjetnost, da imata med n ljudmi (med katerimi ni dvojčkov) vsaj dva na isti dan rojstni dan?

n	Verjetnost
20	0,41
23	0,51
30	0,71
40	0,89
50	0,97
60	0,99

SLUČAJNE SPREMENLJIVKE

Slučajna spremenljivka je merjena količina, katere vrednosti naključno variirajo. Največkrat rečemo kar spremenljivka. Označujemo jih ponavadi z velikimi tiskanimi črkami, njihove vrednosti pa z malimi tiskanimi črkami.

Nekaj primerov:

Poskus	Slučajna spremenljivka
Met kocke	Število pik
Met dveh kock	Vsota pik
Rojstvo	Teža novorojenčka

Neodvisne slučajne spremenljivke

Intuitivno: Dve slučajni spremenljivki sta neodvisni, če poznavanje vrednosti ene od njiju ne pove ničesar o vrednostih druge.

Nekaj primerov:

- Izida dveh zaporednih metov kocke sta neodvisna.
- Vrednosti krvnih pritiskov dveh različnih oseb so (ponavadi) neodvisne.
- Porazdelitvi višine in teže med ljudmi nista neodvisni.

Formalno: Slučajni sporemenljivki X in Y sta neodvisni, če sta dogodka $\{X \leq x\}$ in $\{Y \leq y\}$ neodvisna za vsak x in y.

Neodvisnost oz. **pogojna neodvisnost** (spremenljivki sta neodvisni pri dani vrednosti tretje spremenljivke) sta v statistiki izjemno pomembni. Gre za idealizacijo ali poenostavitev procesov v naravi, ki jo s pridom izkoriščamo pri statističnem modeliranju.

Primera:

- Če je prognoza za bolnika z rakom **neodvisna** od histološke klasifikacije tumorja, lahko napovedujemo, ne da bi se ozirali na takšno klasifikacijo.
- Če je prognoza za bolnika z rakom **pogojno neodvisna** od histološke klasifikacije tumorja pri dani starosti bolnika, potem nam ni potrebno poznati histološke klasifikacije, če poznamo starost bolnika.

Kot bomo videli, bosta neodvisnost oz. pogojna neodvisnost pogosto predpostavki (hipotezi), ki ju bomo preverjali s statističnimi testi. Kadar bomo predpostavko o neodvisnosti zavrnili, bo pomembno opisati naravo odvisnosti.

VRSTE SPREMENLJIVK

1. **Opisne** (atributivne, kategorialne) - vrednosti spremenljivke le opišemo. Opisne spremenljivke ponavadi delimo na
   - **imenske** (nominalne) so tiste, katerih vrednosti ne moremo urediti
   - **vrstilne** (ordinalne) so tiste, katerih vrednosti lahko uredimo po velikosti (v tako imenovano ranžirno vrsto)
2. **Numerične** - vrednosti spremenljivke so števila, s katerimi lahko računamo. Imamo spet dve podskupini
   - **razmične** (intervalne) so tiste, ki jih lahko odštevamo, njihov kvocient pa nima pravega smisla, ker ne obstaja absolutna ničla (čeprav obstaja neka ničla). Na primer temperatura.
   - **razmernostne** (racionalne) imajo še absolutno ničlo in tako npr. kvocient 2 pomeni, da je ena vrednost dvakrat večja od druge.

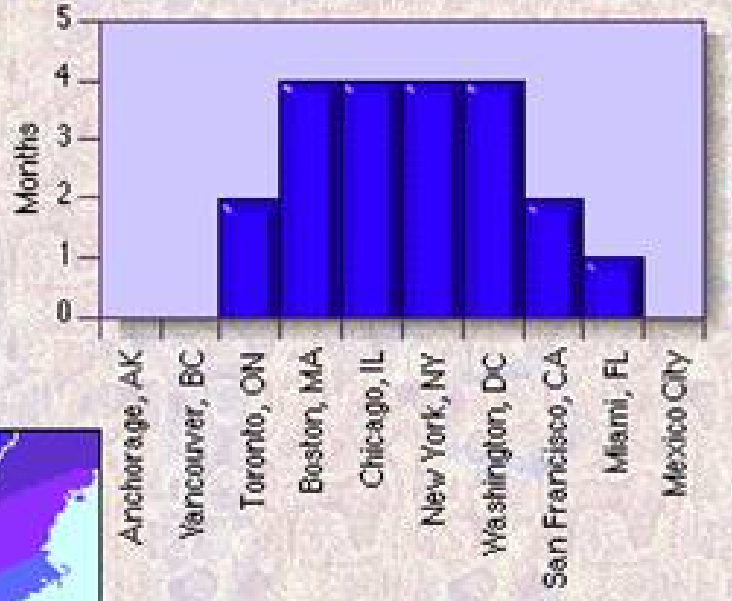
Stevens's Classification

Nominal: hot or cold faucet

Interval: body temperature

Ordinal: isotherms

Ratio: typical number of months with one or more days with maximum temperatures of 100°F or more for ten North American cities



According to the psychometrician S. S. Stevens, a variable can also be categorized as:

Nominal: the same as qualitative.

Ordinal: categories with a natural quantitative sequence (order).

Interval: successive numerical values that are equally spaced; zero does not mean the absence of the characteristic being measured and hence can be chosen arbitrarily.

Ratio: the same as interval, but with a natural zero.

Gender Is a Qualitative Variable

Examples of qualitative data include:

sex (male, female);

5-year survival (survived five years, did not survive five years); and

presence of a particular symptom (present, absent).

In each example, the information of interest would be the count for each category.

Play/Stop

Examples of Qualitative Data

Blood Type Is a Qualitative Variable

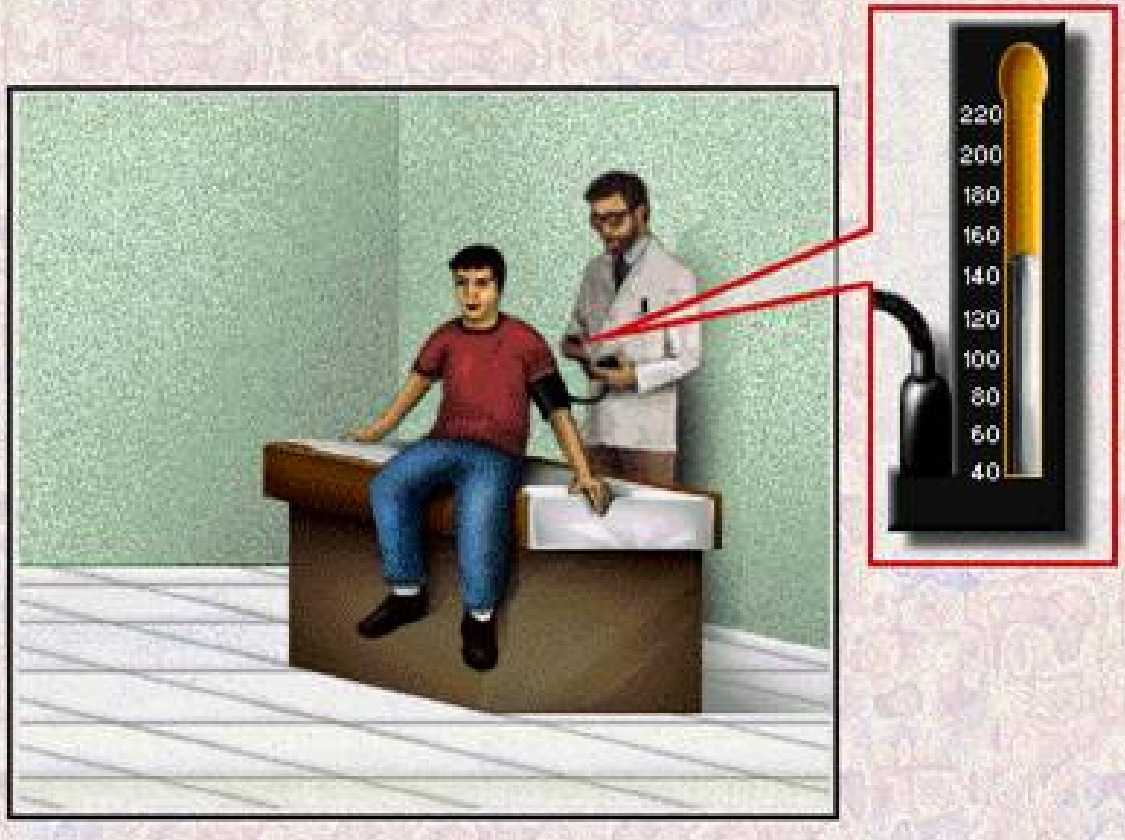
The ABO blood types (categories) are not quantitative.

Qualitative variables are those that cannot be expressed quantitatively, but rather can only be categorized.

For most qualitative variables, there are a small number of possible categories.

Examples of Qualitative Data

Blood Pressure Is a Quantitative Variable



Quantitative variables are those to which we can put a "measuring stick." These can be further classified as **continuous** (that is, the "stick" has all possible values in a given range) or **discrete** (in which only certain values are possible).

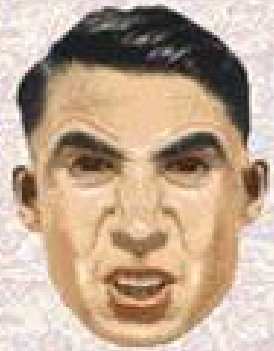
Examples of Quantitative Data

Continuous Variables

Body temperature
(continuous)

Amount of rainfall
(continuous)

Number of months until
recurrence of cancer
(discrete)



Level of pain
(discrete)

Some examples of quantitative variables are:

- body temperature (continuous),
- amount of rainfall (continuous),
- number of months until recurrence of cancer (discrete), and
- level of pain, e.g., mild, moderate, or severe (discrete).

Examples of Quantitative Data

Country	Inflation	GDP per capita	People per MD	People per TV	Life expectancy
Kenya	0.1	1,377	9,851	78.4	59
Japan	0.2	21,328	566	1.6	80
Singapore	1.3	21,493	711	2.6	76
Fiji	1.5	5,220	2,080	30.8	72
Germany	1.8	20,165	333	1.8	76
France	2.0	19,774	333	2.5	77
Switzerland	2.0	24,483	585	2.5	78
Taiwan	2.0	13,235	928	3.1	75
Brunei	2.5	15,580	1,323	3.1	74
Canada	2.5	21,268	446	1.6	78
U.S.	2.5	25,900	419	1.2	77
Maldives	3.1	1,373	5,330	48.0	64
Malaysia	3.4	8,763	2,063	4.7	72
New Zealand	3.5	17,045	332	2.3	76
Bangladesh	3.7	1,290	12,500	170.5	56

Here, the observations and variables come from a larger data set published in *Asia Week*.

Observations: Each country is an observation. The table is part of a data set that includes 46 countries, mostly from Asia, Europe, and North America.

Variables: All the variables listed, except for country name, are quantitative. But we might decide to define a qualitative (or categorical) variable that isn't mentioned here—say, Region, with such categories as Asia, Europe, North America, Africa, and so on.

OPISOVANJE VARIABILNOSTI V POPULACIJI

Če možnih vrednosti ni veliko, preprosto navedemo verjetnost vsake vrednosti.

Primer: *Met kocke*
Možni izidi so 1, 2, 3, 4, 5, in 6, njihove verjetnosti pa

$$P(1) = P(2) = \cdots = P(6) = 1/6.$$

Primer: *Krvna skupina*
Če imata starša oba krvno skupino AB, so verjetnosti krvne skupine pri otroku naslednje

$$P(A) = 1/4, \quad P(AB) = 1/2, \quad P(B) = 1/4.$$

V praksi seveda ni vedno tako enostavno.

Primer: *Met dveh kock*

Možnih je 36 izidov, vsak ima verjetnost $1/36$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Slučajna spremenljivka $Y =$ “vsota pik” lahko zavzame vrednosti 2,3,4, . . . ,12.

Verjetnostno porazdelitev spremenljivke Y lahko izpeljemo iz verjetnostne porazdelitve parov pik. Dobimo

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Porazdelitvene funkcije

Za zvezne spremenljivke, kot so teža, krvni pritisk in podobno, podajanje porazdelitve verjetnosti v tabelah ni praktično (teoretično niti ni možno, ampak o tem tu ne bomo).

Variabilnost v teh primerih podajamo s **(kumulativno) porazdelitveno funkcijo**. Za slučajno spremenljivko X je njena porazdelitvena funkcija $F(x)$ definirana takole

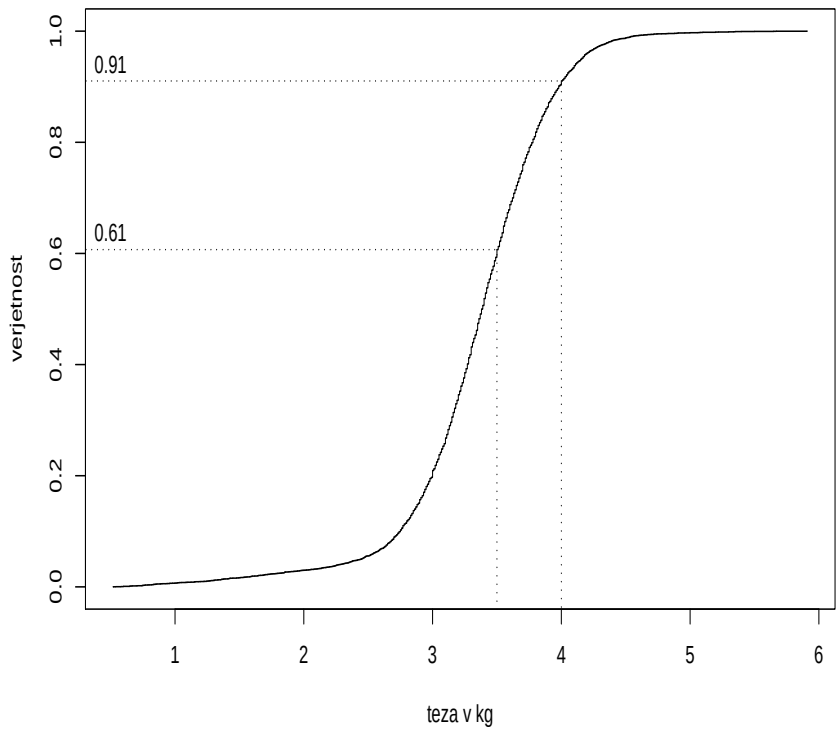
$$F(x) = P(X \leq x),$$

Pri dani vrednosti x je $F(x)$ torej verjetnost, da so vrednosti slučajne spremenljivke X manjše od x. Z drugimi besedami, $F(x)$ je delež vrednosti X, ki so manjše od x.

Vrnimo se k primeru s porodno težo. Spodnja slika kaže (empirično) porazdelitveno funkcijo porodne teže. Iz nje razberemo, da je 61% novorojenčkov lažjih od 3,5 kg in kar 91% lažjih od štirih kilogramov. Med 3,5 in 4 kg pa je

$$\begin{aligned} P(\text{teža} \leq 4kg) - P(\text{teža} \leq 3{,}5kg) &= F(4) - F(3{,}5) \\ &= 0{,}91 - 0{,}61 = 0{,}3, \end{aligned}$$

torej 30% novorojenčkov.



Verjetnostna porazdelitev in gostota verjetnosti

Diskretne porazdelitve

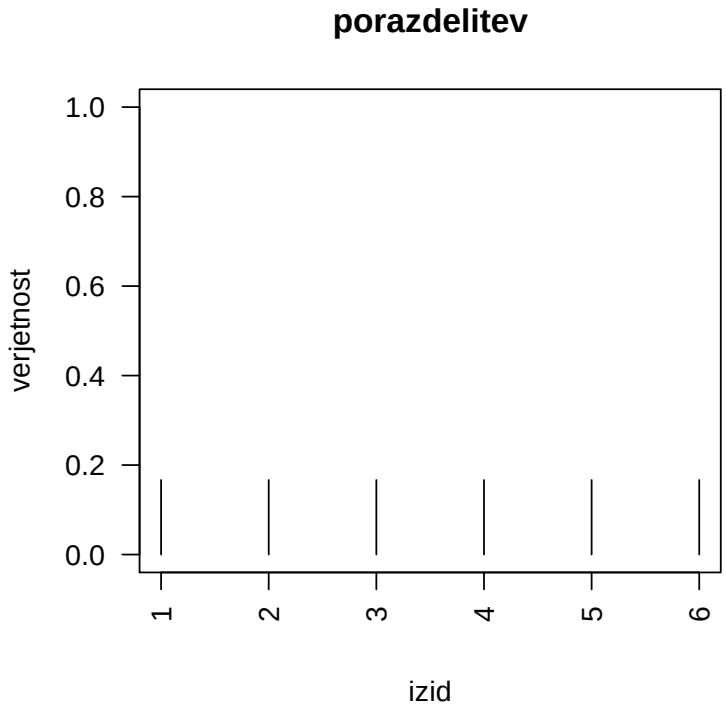
Kot smo videli na primerih, za diskretne spremenljivke ponavadi lahko navedemo verjetnosti pojava posameznih vrednosti, torej

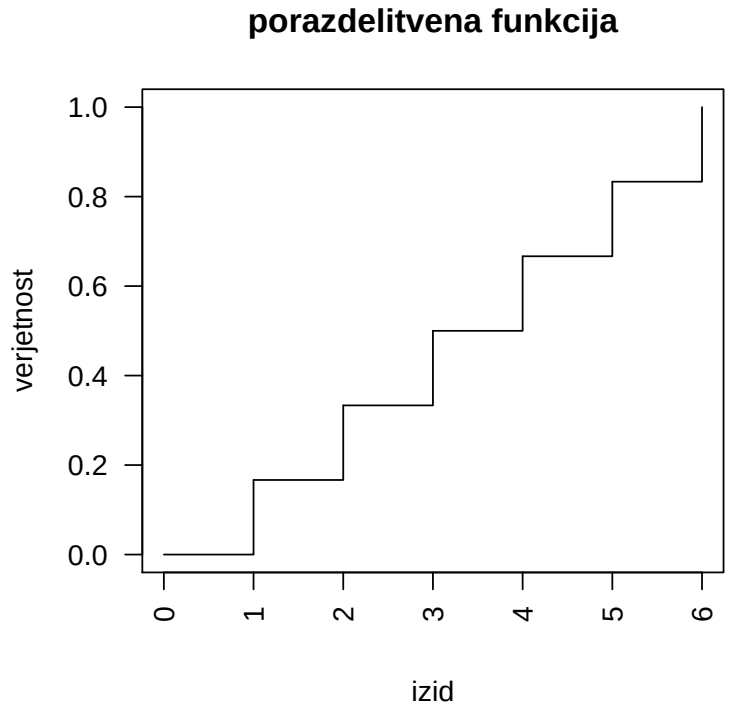
$$p(x) = P(X = x),$$

čemur rečemo **verjetnostna porazdelitev**. Porazdelitvena funkcija pri x je potem definirana kot vsota verjetnosti vseh izidov, manjših ali enakih x

$$F(x) = \sum_{y \leq x} p(y).$$

Primer: *Met kocke*





Za verjetnostno porazdelitev velja:

1. $\sum_{\text{vsi } x} p(x) = 1.$
2. $p(x) \geq 0.$
3. $P(a < X \leq b) = \sum_{a<x\leq b} p(x).$

Zvezne porazdelitve

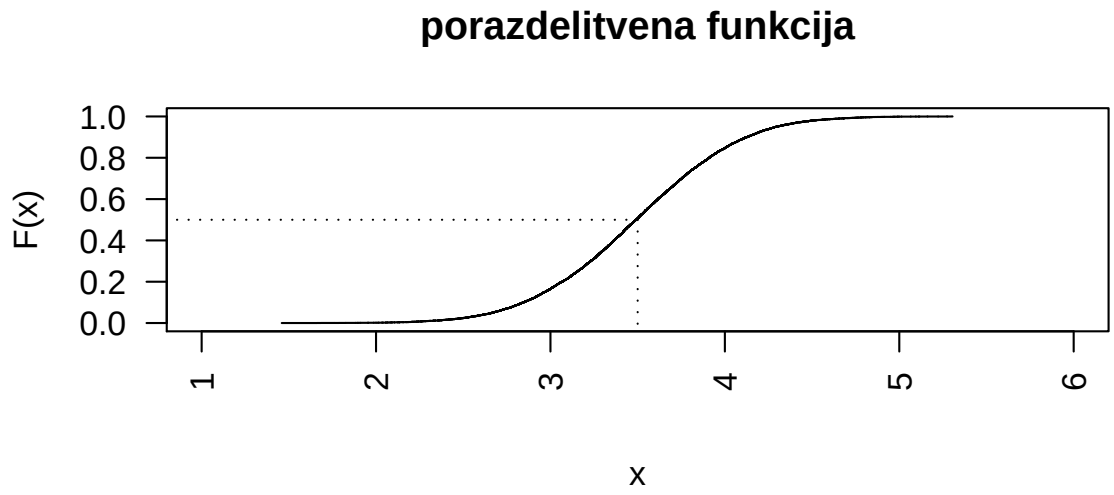
Pri zveznih porazdelitvah ne moremo govoriti o verjetnostih posameznih vrednostih, pač pa lahko govorimo o **gostoti verjetnosti**. To je funkcija, ponavadi jo označujemo z $f(x)$, ki pove, kako goste so vrednosti okrog danega x. Verjetnost, da je vrednost spremenljivke v intervalu $(x,x+\Delta x)$ je približno $f(x)\Delta x$, natančna definicija pa pravi

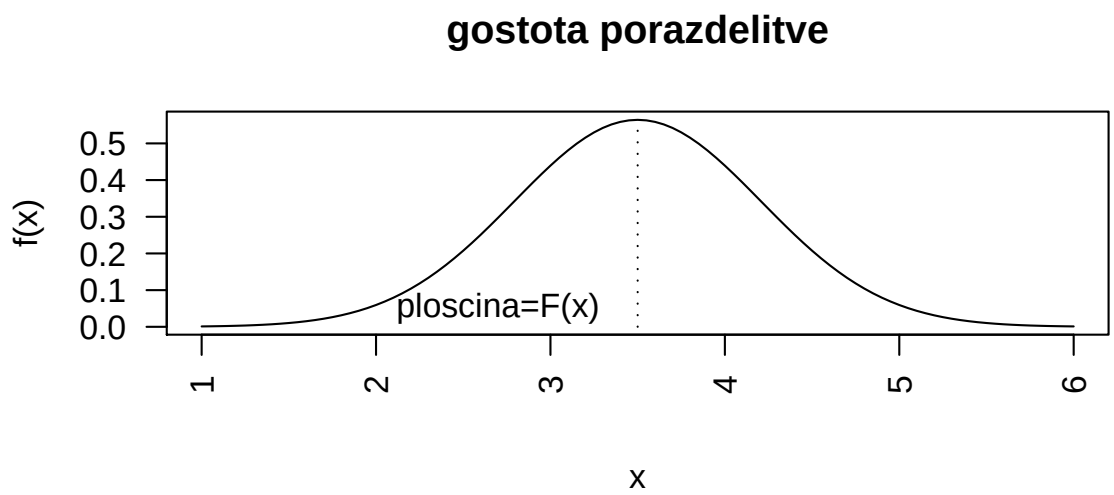
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Za gostoto velja:

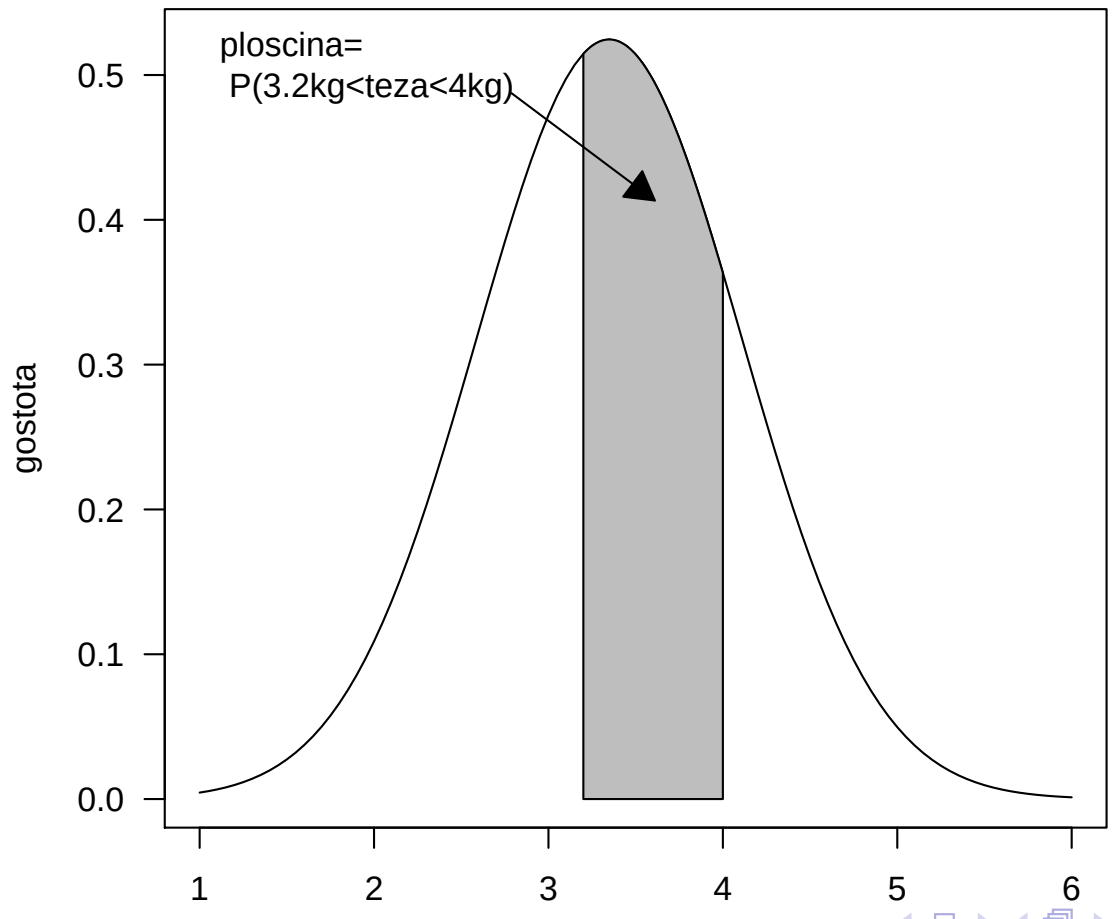
1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$
2. $f(x) \geq 0.$
3. $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$

Povezava med porazdelitveno funkcijo in gostoto je ilustrirana na spodnji sliki.





Če je porazdelitev zvezna, je verjetnost, da je vrednost spremenljivke v nekem intervalu (a,b) enaka ustrezni ploščini pod krivuljo, ki predstavlja gostoto porazdelitve. Na spodnji sliki je ilustrirana verjetnost, da je porodna teža otroka med 3,2 in 4 kilogrami.



OPISOVANJE VARIABILNOSTI NA VZORCU

Porazdelitvena funkcija, verjetnostna funkcija in gostota so **teoretične funkcije**, ki opisujejo variabilnost v populaciji.

Za opisovanje variabilnosti na vzorcih uporabljamo analogno definirane **empirične funkcije**.

Diskretne porazdelitve

Histogram: Graf frekvenc, ali relativnih frekvenc za vsako vrednost spremenljivke.

Empirična porazdelitvena funkcija: Graf kumulativne relativne frekvence.

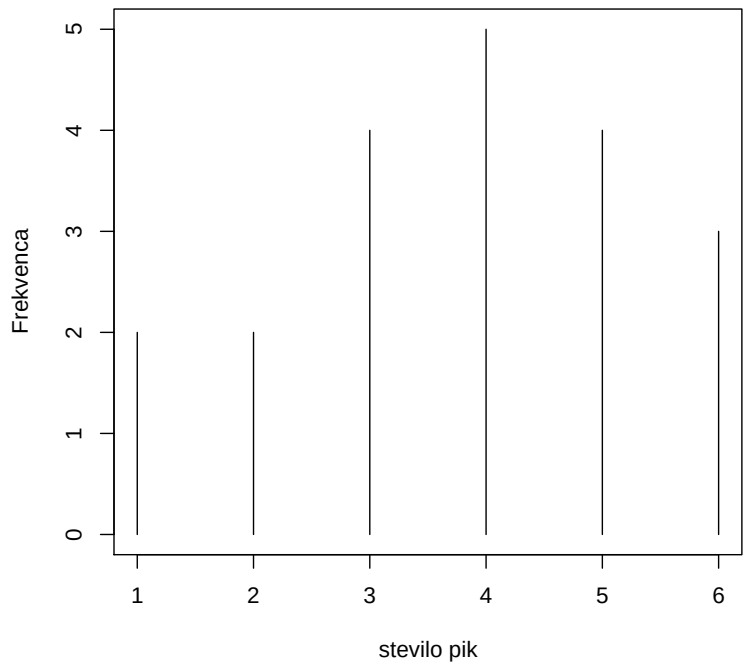
Primer: Metanje kocke. Kocko vržemo 20-krat.

Met	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Izid	1	3	3	6	5	5	4	1	2	3	4	5	4	3	4	6	6	2	4	5

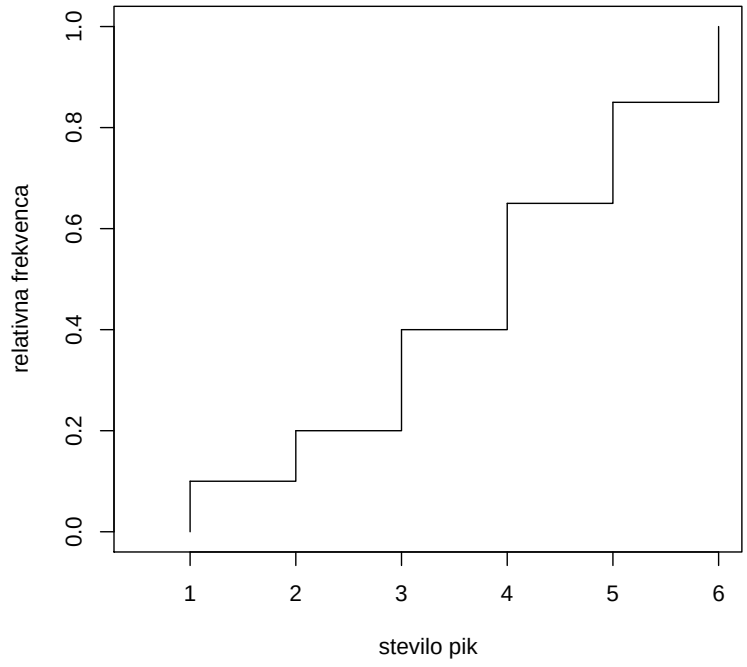
Izide lahko povzamemo v tabeli

Izid	1	2	3	4	5	6
Relativna frekvenca	10%	10%	20%	25%	20%	15%

ali narišemo histogram



Empirična porazdelitvena funkcija pa je videti takole

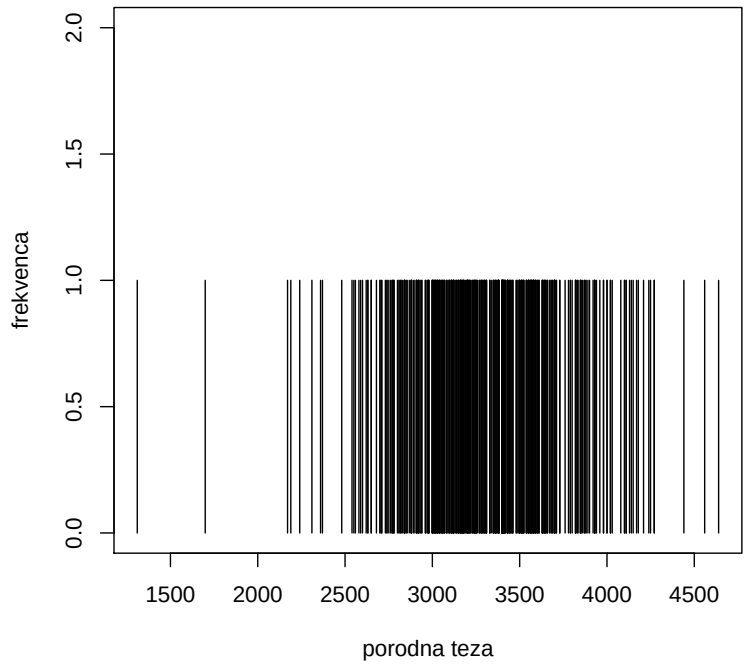


Opomba: Pri majhnem številu vrednosti (kot v našem primeru) je tabela ponavadi najprimernejša.

Zvezne porazdelitve

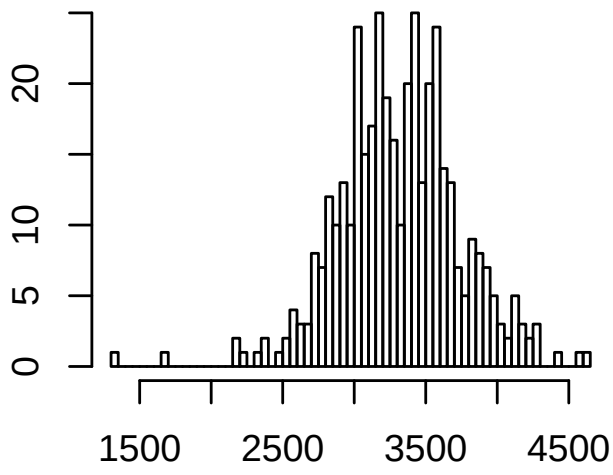
Primer: *Porodna teža dečkov, rojenih v 38. tednu nosečnosti*

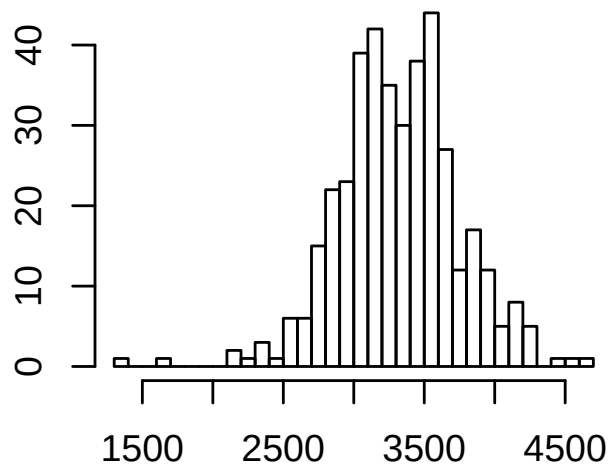
Spodnji graf (histogram) prikazuje frekvence porodne teže 398 dečkov. Teža je merjena na gram natančno.

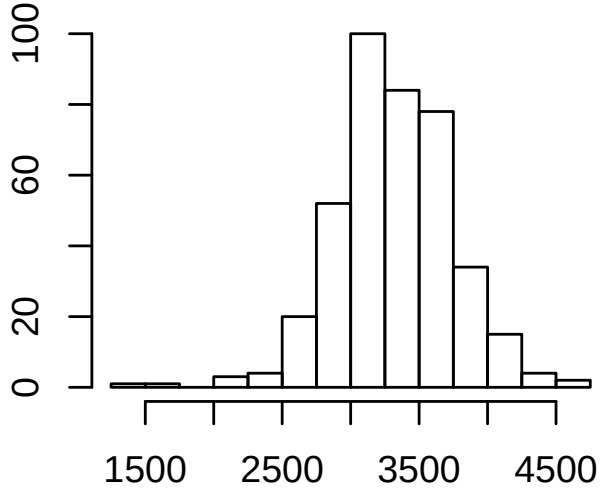


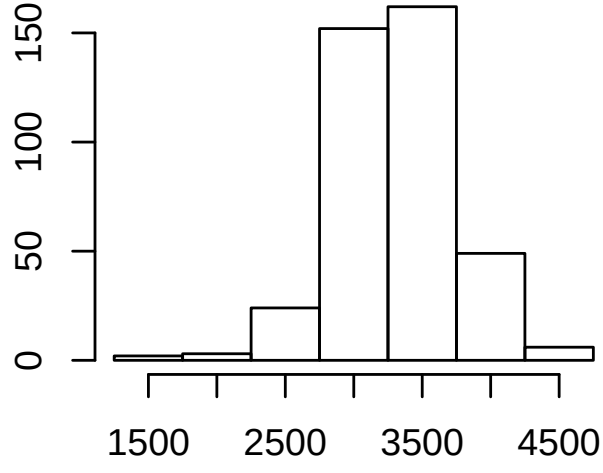
Ker so vse teže različne (frekvence so 1!), graf ne pove dosti. Ločimo le bolj goste predele od manj gostih.

Smiselno je torej grupiranje podatkov. Vrednosti spremenljivke zato razdelimo v intervale in nad vsakim intervalom narišemo pravokotnik, čigar ploščina je sorazmerna (relativni) frekvenci vrednosti v tistem intervalu. Tudi takšnemu grafu rečemo **histogram**. Oblika histograma je odvisna od tega, koliko intervalov (razredov) smo izbrali. Na sliki so histogrami za 4 različna grupiranja (50g, 100g, 250g in 500g).

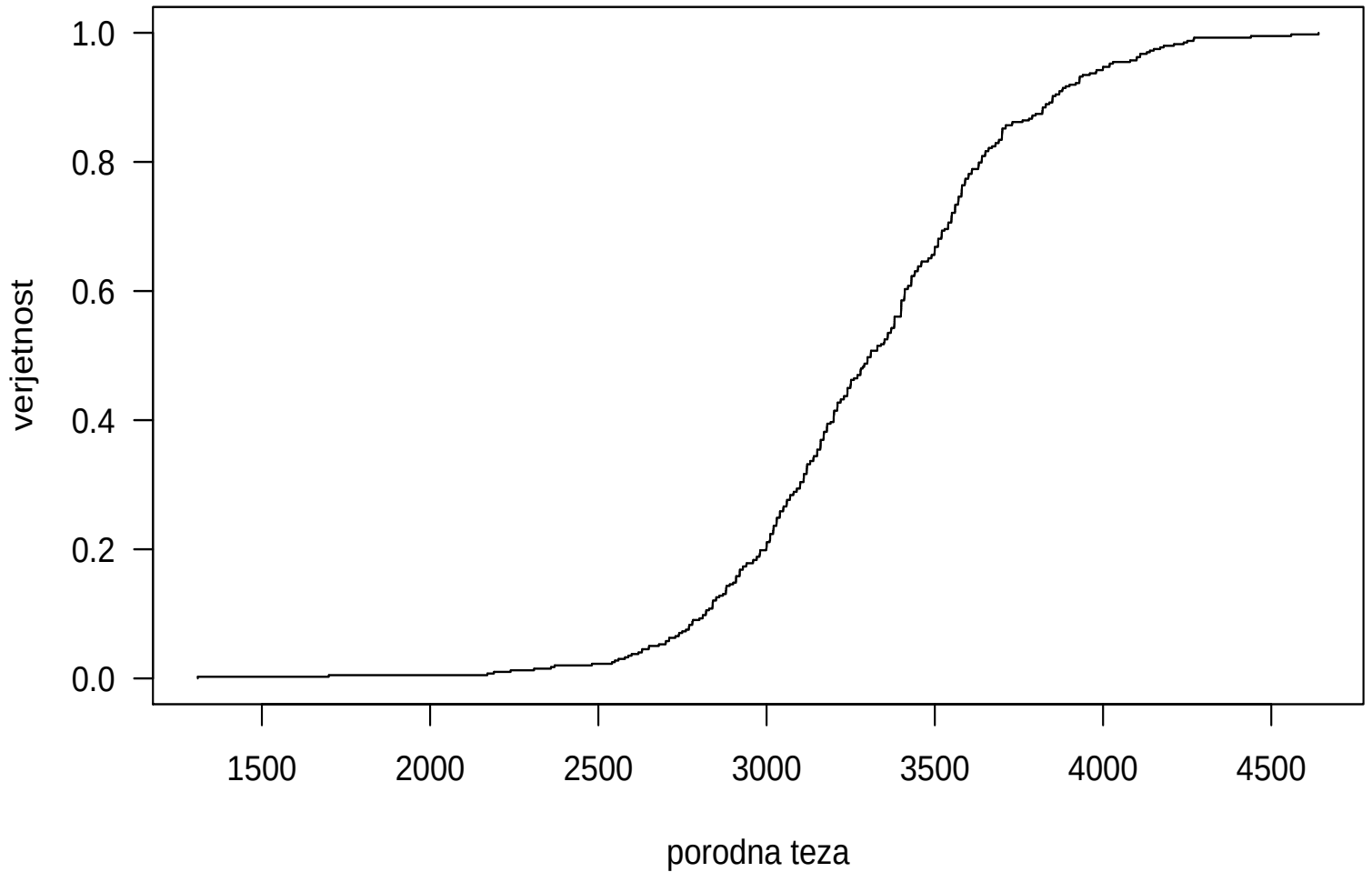

0
5
10
20
1500
2500
3500
4500


0
10
20
30
40
1500
2500
3500
4500


0
20
60
100
1500
2500
3500
4500


0
50
100
150
1500
2500
3500
4500

Na spodnji sliki pa je **empirična porazdelitvena funkcija**. Čeprav je v smislu vsebine, ki jo prikazuje, enakovredna histogramu, pa informacijo s takšnega grafa težje razberemo.



Seveda histogram in empirična porazdelitvena funkcija nista edina možna načina za opisovanje variabilnosti na vzorcu. Vsaj še en graf je treba omeniti, a preden to storimo, moramo spoznati kvantile.

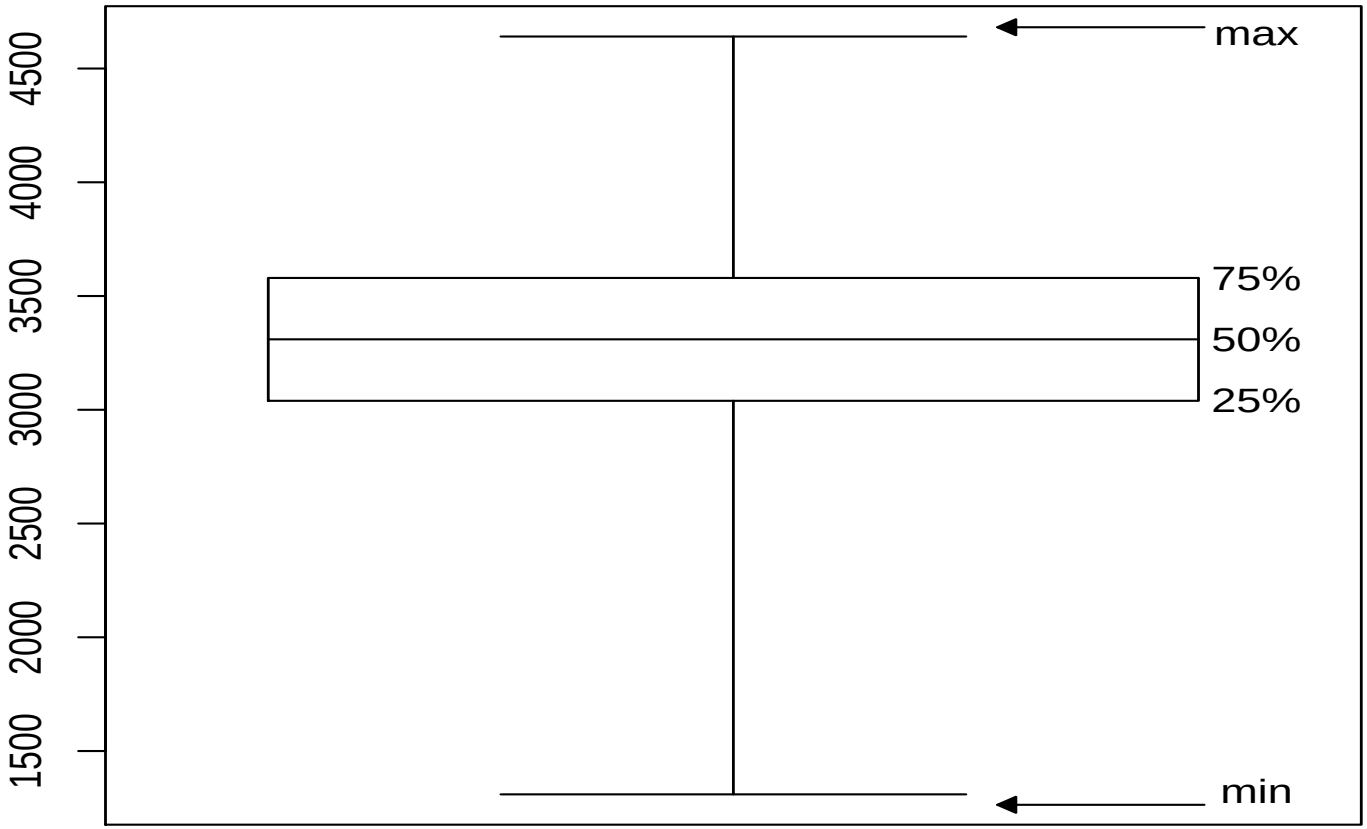
Kvantili

Vrednost, pod katero leži določen delež podatkov se imenuje kvantil. Ponavadi govorimo kar o **percentilih** (ali centilih). Teh je 99 in razdelijo vse po velikosti urejene podatke na 100 delov, v vsakem delu torej leži 1 odstotek vseh vrednosti. Na primer, pod 10. percentilom leži 10% vrednosti, nad njim pa 90% vrednosti. Navajanje percentilov pogosto ni praktično, največkrat nam za opis variabilnosti zadoščajo **kvartili**. To so vrednosti, ki po velikosti urejene podatke razdelijo na 4 kose. Kvartili so torej trije, prvi, drugi in tretji, drugi ima še posebno ime - **mediana**. Pod mediano torej leži polovica vseh vrednosti, nad njo pa tudi polovica.

Graf kvantilov

Graf kvantilov v (angleščini *box-and-whiskers plot*) v svoji osnovni obliki prikazuje 5 števil: minimum, tri kvartile in maksimum. Razpon od prvega do tretjega kvartila je prikazan s pravokotnikom (box), do minimuma in maksimuma pa od pravokotnika segata daljici (whiskers). Znotraj pravokotnika je s črto označena mediana. Nekatere verzije grafa drugače definirajo pomen daljic, zato je pametno vedno preveriti, kaj nam program nariše. Razdaljo od prvega do tretjega kvartila imenujemo **interkvartilni razmik**, ki tako po definiciji vedno zajema srednjih 50% podatkov.

Spodnja slika prikazuje enake podatke kot gornji histogrami, torej teže dečkov, rojenih v 38. tednu nosečnosti.



POVZEMANJE GLAVNIH ZNAČILNOSTI PORAZDELITVE

Porazdelitvena funkcija in gostota dajeta sicer popolno informacijo o variabilnosti v podatkih, a pogosto želimo informacijo strniti z nekaj značilnostmi. Za ta namen uporabljamo predvsem **mere središčnosti** in **mere razpršenosti**.

Od mer središčnosti si bomo ogledali samo dve, ki ju največkrat uporabljamo. Kar tu pa omenimo še tretjo, imenovano **modus**, ki je na vzorcu najpogostejša vrednost, v populaciji pa najverjetnejša vrednost.

Mere središčnosti

Na vzorcu velikosti n (empirična vrednost)	**V populaciji** (teoretična vrednost)
Aritmetična sredina (ali **vzorčno povprečje**)	**Pričakovana vrednost** (**populacijsko povprečje**)
$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n}[x_i \cdot \frac{1}{n}]$	Diskretna porazdelitev
V kakšnem smislu je $\bar{x}$ sredina?	$E(X) = \mu = \sum_x [x \cdot p(x)]$
Ker je $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$,	Zvezna porazdelitev
sta vsoti levih in desnih odmikov enaki!	$E(X) = \mu = \int xf(x)dx$
Mediana = srednja vrednost glede na range (pri sodem n aritm. sredina srednjega para).	**Mediana** = tista vrednost, za katero velja $F(x) = 0{,}5$. Podobno definiramo druge kvantile. Za diskretne porazdelitve je stvar nekoliko nerodna.

Mere razpršenosti

Na vzorcu velikosti n (empirična vrednost)	**V populaciji** (teoretična vrednost)
Vzorčna varianca = povprečen kvadriran odmik od aritmetične sredine $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ (Zakaj ne delimo z n bo jasno kasneje!)	**Varianca** = pričakovana vrednost kvadriranega odmika od aritmetične sredine $Var(X) = \sigma^2 = \sum_x [x - E(X)]^2 \cdot p(x)$ oziroma $Var(X) = \sigma^2 = \int [x - E(X)]^2 f(x)dx$
Vzorčni standardni odklon (deviacija) = kvadratni koren variance $s = \sqrt{s^2}$	**Standardni odklon** = kvadratni koren variance $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Mere razpršenosti - nadaljevanje

Na vzorcu velikosti *n* (empirična vrednost)	**V populaciji** (teoretična vrednost)
Interkvartilni razmik = razlika med 3. in 1. kvartilom empirične porazdelitve	**Interkvartilni razmik** = razlika med 3. in 1. kvartilom teoretične porazdelitve

Primer: Met kocke (nadaljevanje)

najprej izračunajmo empirične vrednosti.

$$\bar{x} = \frac{1}{20} \cdot (1+3+3+6+5+\cdots+6+6+2+4+5) = \frac{1}{20} \cdot 76 = 3{,}8.$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{20-1} \cdot [(1-3{,}8)^2 + (3-3{,}8)^2 + \cdots + (5-3{,}8)^2] \\ &= \frac{1}{19} \cdot 45{,}20 = 2{,}3789. \end{aligned}$$

Če opazovanja uredimo po velikosti, ugotovimo, da sta srednji vrednosti dve štirici (imamo sodo število opazovanj!) in je torej

$$\text{mediana} = \frac{4+4}{2} = 4.$$

Primer: Met kocke (nadaljevanje)

Če bi bila kocka popolnoma simetrična, bi bile verjetnosti vseh metov enake, torej

$$p(1) = p(2) = \cdots = p(6) = \frac{1}{6}$$

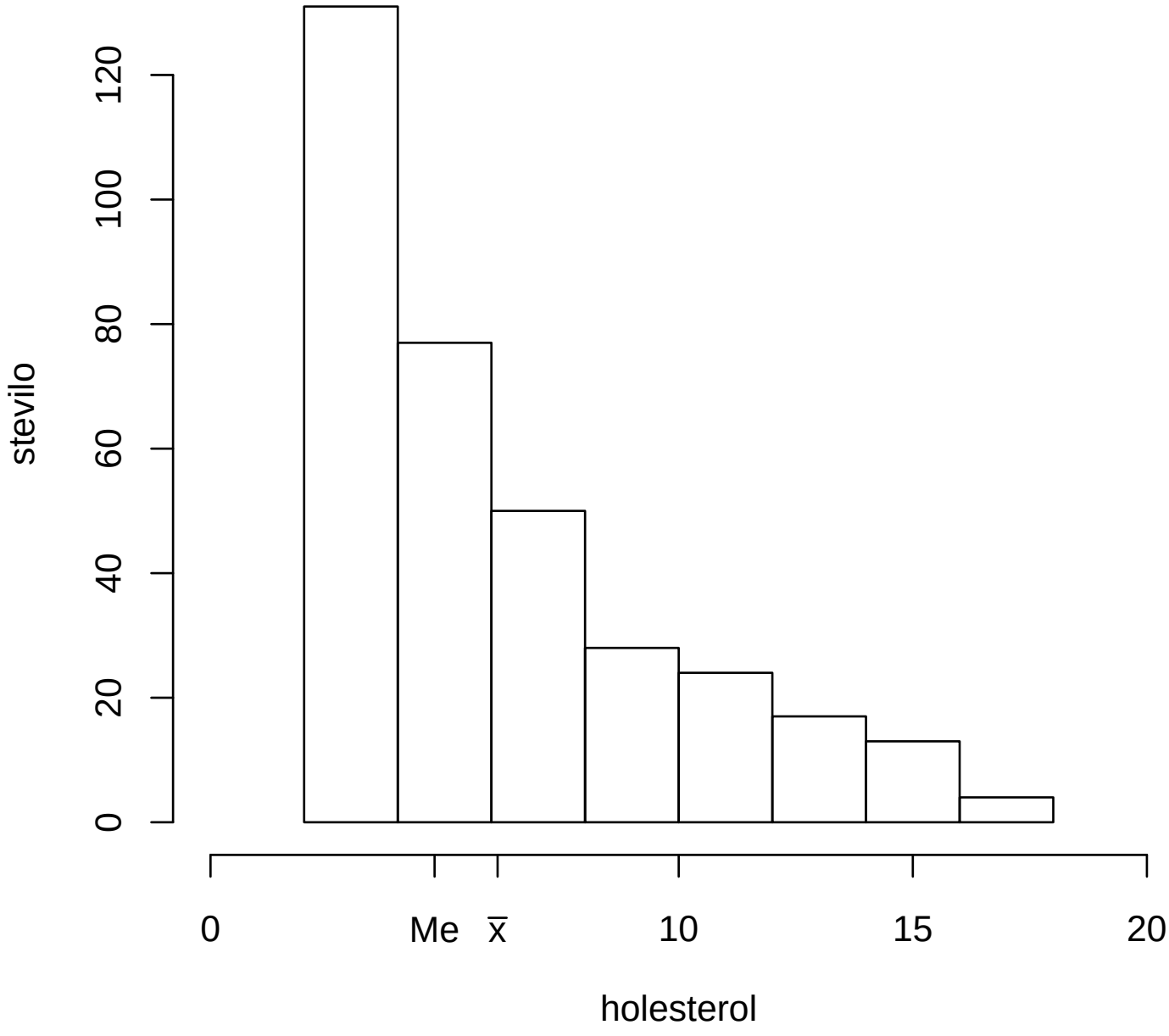
pričakovana vrednost in varianca pa

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= (1 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + (6 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &= 2{,}9167. \end{aligned}$$

Primerjava aritmetične sredine in mediane

Mediana razdeli vse podatke na dva dela, v vsakem je 50% podatkov. Aritmetična sredina je teoretično enaka mediani, kadar je porazdelitev simetrična. Za naš primer dečkov, rojenih v 38. tednu nosečnosti, sta tako aritmetična sredina 3314 gramov in mediana 3310 gramov. Na sliki na naslednji strani pa vidimo, da je holesterol zelo nesimetrično porazdeljen, kar ima za posledico precejšnjo razliko med aritmetično sredino in mediano (6,13 proti 4,79).


stevilo
0
20
40
60
80
100
120
0
Me
x̄
10
15
20
holesterol

Primerjava aritmetične sredine in mediane - nadaljevanje

Razlike lahko povzročijo tudi tujki, to so nenavadne vrednosti daleč od ‘sredine’. Te vplivajo na aritmetično sredino, ne pa na mediano.

Mediano bomo torej rajši uporabljali pri nesimetričnih porazdelitvah, če ne bomo posebej želeli, da mera središčnosti upošteva dejanske vrednosti spremenljivke. Pa še eno prednost ima mediana. Da bi jo določili moramo poznati le 50% vrednosti, za ostale je dovolj, če vemo, da so večje od teh. To nam pride posebej prav v analizi preživetja.

Povsem idealna seveda tudi mediana ni. Kot že rečeno, ne upošteva dejanskih vrednosti spremenljivke (razen pri rangiranju), zelo nerodna pa je za računanje. Tako se recimo mediana dveh združenih vzorcev ne da izraziti z medianama posameznih vzorcev.

LASTNOSTI PRIČAKOVANE VREDNOSTI IN VARIANCE

1. Za vse slučajne spremenljivke velja

$$E(a_0 + a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) = a_0 + a_1 E(X_1) + \cdots + a_n E(X_n)$$

2. Za **neodvisne** slučajne spremenljivke velja

$$\begin{aligned} &Var(a_0 + a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) \\ &= (a_1)^2 Var(X_1) + \cdots + (a_n)^2 Var(X_n) \end{aligned}$$

Slučajni vzorec

Če so slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ paroma neodvisne in identično porazdeljene (iid), govorimo o **slučajnem vzorcu**.

Vzorčno povprečje $\bar{X} = (\sum X_i)/n$ je seveda spet slučajna spremenljivka.

Primer: Pričakovana vrednost in varianca vzorčnega povprečja

Slučajni vzorec

Če so slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ paroma neodvisne in identično porazdeljene (iid), govorimo o **slučajnem vzorcu**.

Vzorčno povprečje $\bar{X} = (\sum X_i)/n$ je seveda spet slučajna spremenljivka.

Primer: Pričakovana vrednost in varianca vzorčnega povprečja

$$
\begin{aligned}
E(\bar{X}) &= E(\frac{1}{n} \cdot [X_1 + X_2 + \cdots + X_n] \\
&= \frac{1}{n} E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\
&= \frac{1}{n} \cdot [E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)] \\
&= \frac{1}{n} \cdot [\mu + \mu + \cdots + \mu] = \mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(\bar{X}) &= Var(\frac{1}{n} \cdot [X_1 + X_2 + \cdots + X_n] \\
&= \frac{1}{n^2} Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot [Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)] \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot [\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2] = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

$$
sd(\bar{X}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}
$$

Standardnemu odklonu vzorčnega povprečja rečemo **standardna napaka**.

Risanje grafov

“... drawing graphs, like motor-car driving and love-making, is one of those activities which almost every researcher thinks he or she can do well without instruction.”

Wainer & Thissen, 1991 Annual Review of Psychology

Nekateri principi konstrukcije grafov

Nekateri principi konstrukcije grafov

1. Izločite nepotrebne dimenzije

Nekateri principi konstrukcije grafov

1. Izločite nepotrebne dimenzije
2. Oznake merilne lestvice (“tick marks”) naj kažejo navzven

Nekateri principi konstrukcije grafov

1. Izločite nepotrebne dimenzije
2. Oznake merilne lestvice (“tick marks”) naj kažejo navzven
3. Razmislite o vključevanju ničle v graf (včasih dobro, včasih ne)

Nekateri principi konstrukcije grafov

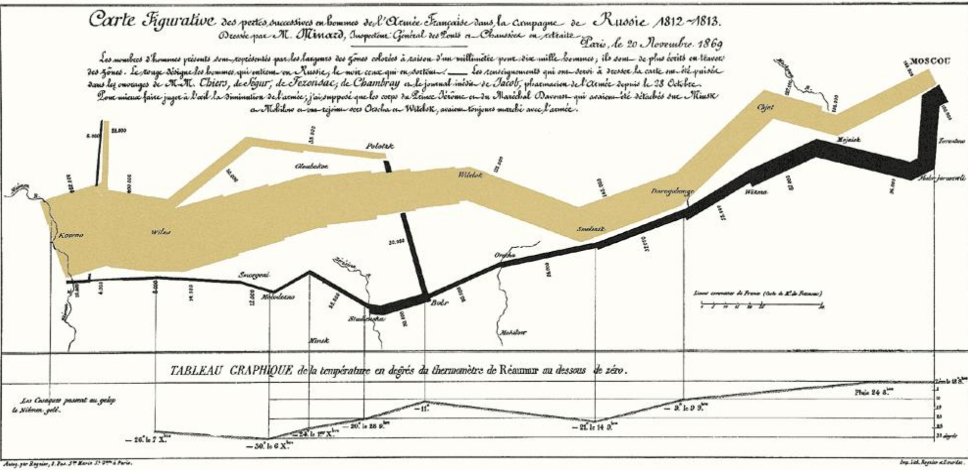
1. Izločite nepotrebne dimenzije
2. Oznake merilne lestvice (“tick marks”) naj kažejo navzven
3. Razmislite o vključevanju ničle v graf (včasih dobro, včasih ne)
4. Zaznavanje relativnih razdalj je najbolj natančno - ploščine so težje

Nekateri principi konstrukcije grafov

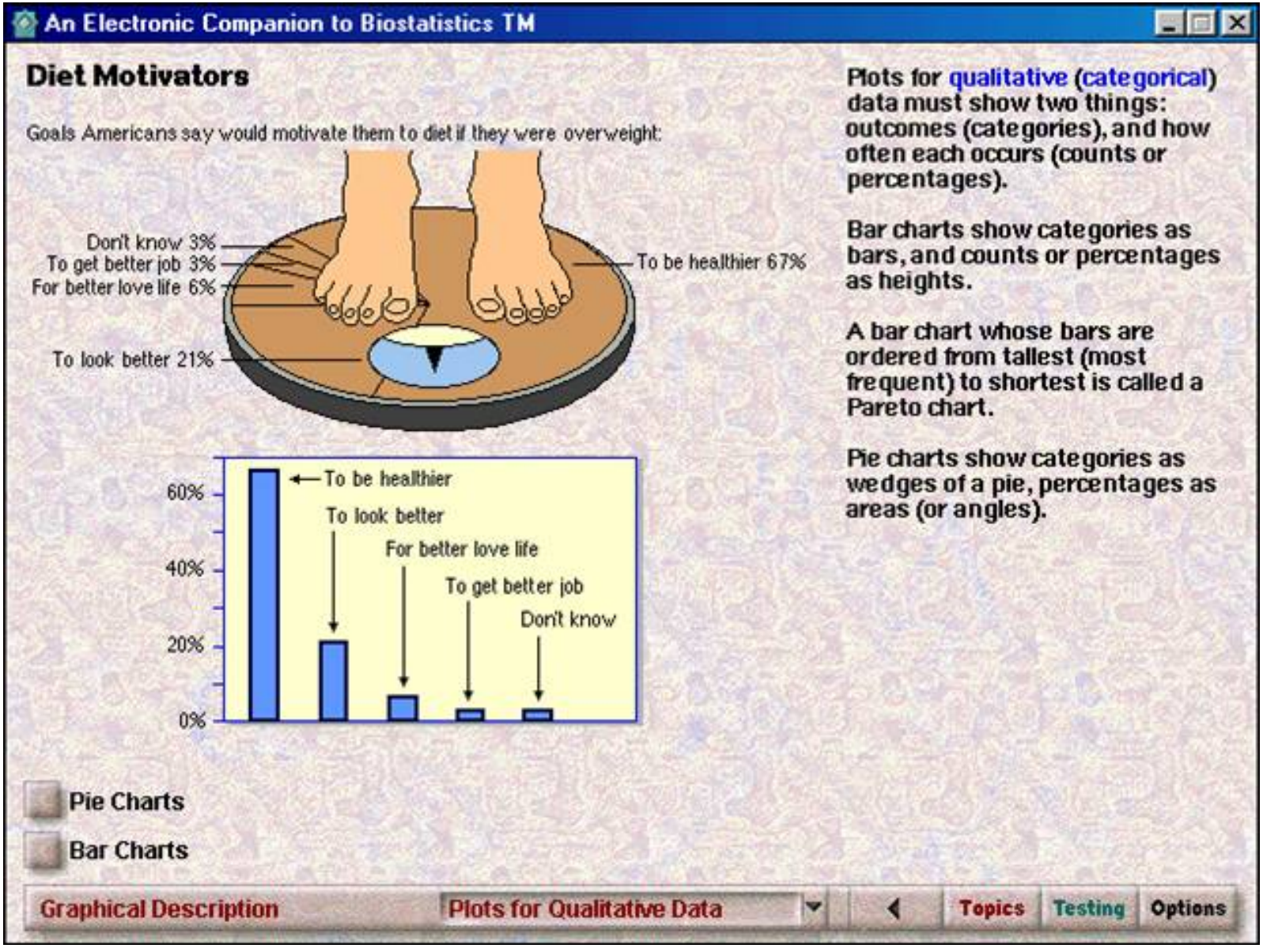
1. Izločite nepotrebne dimenzije
2. Oznake merilne lestvice (“tick marks”) naj kažejo navzven
3. Razmislite o vključevanju ničle v graf (včasih dobro, včasih ne)
4. Zaznavanje relativnih razdalj je najbolj natančno - ploščine so težje
5. Izogibajte se odvečnosti - mislite na razmerje črnilo : informacija

Nekateri principi konstrukcije grafov

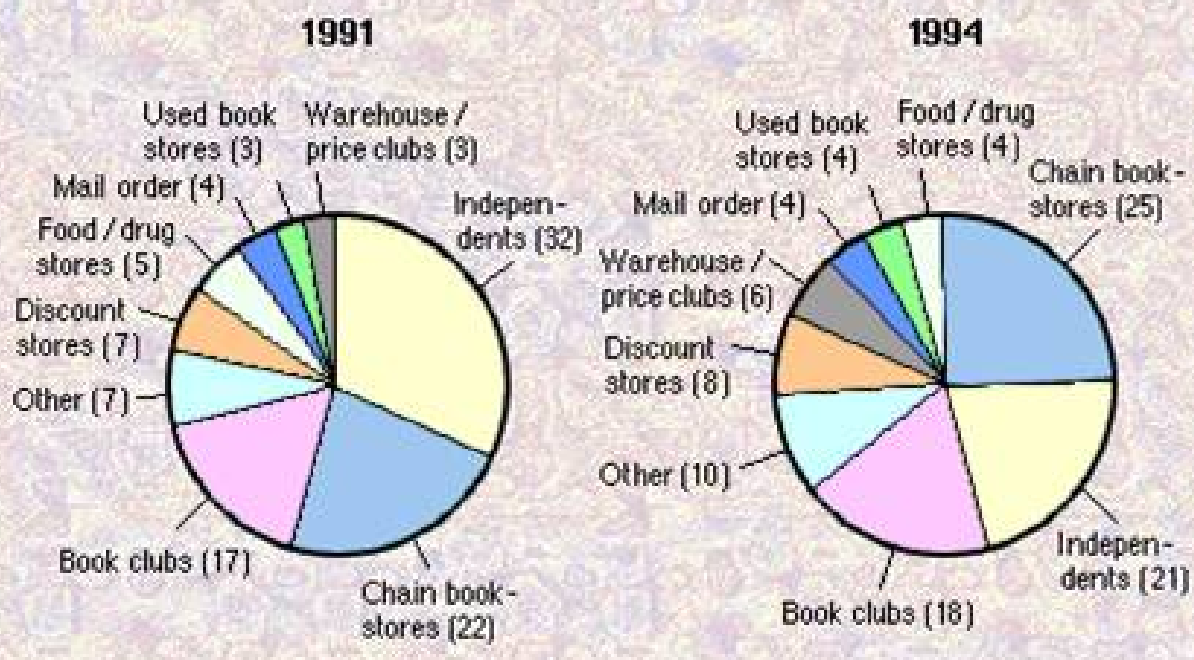
1. Izločite nepotrebne dimenzije
2. Oznake merilne lestvice (“tick marks”) naj kažejo navzven
3. Razmislite o vključevanju ničle v graf (včasih dobro, včasih ne)
4. Zaznavanje relativnih razdalj je najbolj natančno - ploščine so težje
5. Izogibajte se odvečnosti - mislite na razmerje črnilo : informacija
6. Koristni grafi so lahko zahtevni - ne nujno preprosti in takoj dojemljivi


Carte Figurative des pertes successives en hommes de l'Armée Française dans la campagne de Russie 1812–1813.
Dressée par M. Minard, Inspecteur Général des Ponts et Chaussées en retraite.
Paris, le 20 Novembre 1869.
Les nombres d'hommes présents sont représentés par les largeurs des zônes colorées à raison d'un millimètre pour dix mille hommes; ils sont de plus écrits en travers des zônes. Le rouge désigne les hommes qui entrent en Russie, le noir ceux qui en sortent. Les renseignements qui ont servi à dresser la carte ont été puisés dans les ouvrages de MM. Thiers, de Ségur, de Fezensac, de Chambray et le journal inédit de Jacob, pharmacien de l'Armée depuis le 28 Octobre.
Pour mieux faire juger à l'œil la diminution de l'armée, j'ai supposé que les corps du Prince Jérôme et du Maréchal Davoust qui avaient été détachés sur Minsk et Mobilow et ont rejoint vers Orscha et Witebsk, avaient toujours marché avec l'armée.
MOSCOU
Kowno
Wilna
Gloubokoe
Polotzk
Witebsk
Smolensk
Dorogobouge
Wiazma
Chjat
Mojaisk
Tarantino
Malo-jarosewli
Smorgoni
Molodezno
Studienska
Minsk
Bobr
Orscha
Mohilow
TABLEAU GRAPHIQUE de la température en degrés du thermomètre de Réaumur au dessous de zéro.
Les Cosaques passent au galop le Niémen gelé.
— 26° le 7 X.bre
— 30° le 6 X.bre
— 24° le 1er X.bre
— 20° le 28 9.bre
— 11°
— 21° le 14 9.bre
— 9° le 9 9.bre
Pluie 24 8.bre
Zéro le 18 8.bre

Strukturni krog (torta) in stolpčni diagram



Where People Buy Books About Diets



Pie charts are popular, but they are overused.

They show percentages using areas, which are proportional to angles. Because angles are hard to compare by eye, they don't convey numbers very well.

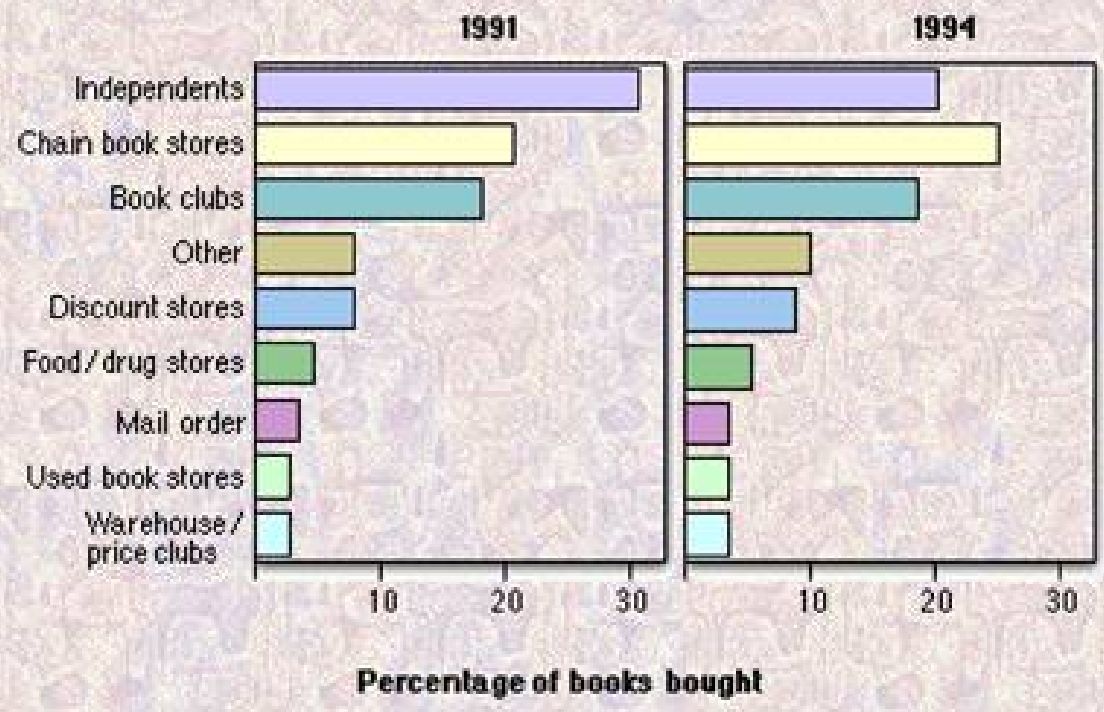
The example at left, which was published in a newspaper, is typical of poorly done pie charts. You get your information from the text, by reading the numbers. The picture doesn't help much.

Computer programs that produce pie charts automatically order the categories by size. Unfortunately, that changes the placement of categories, making the two pie charts harder to compare.

Pie Charts

Bar Charts

Where People Buy Books About Diets



Poor presentation

Better presentation

Bar charts are usually more effective than pie charts.

They show counts or percentages by length, which our eyes find easier to compare than angles.

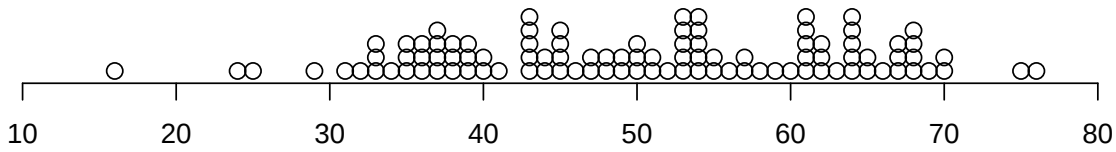
We can produce two bar charts. Each is easy to grasp, unlike the pie charts for the same data, but comparing the two is difficult.

One chart with both sets of data in it, such as the last chart here, can make the comparison easier.

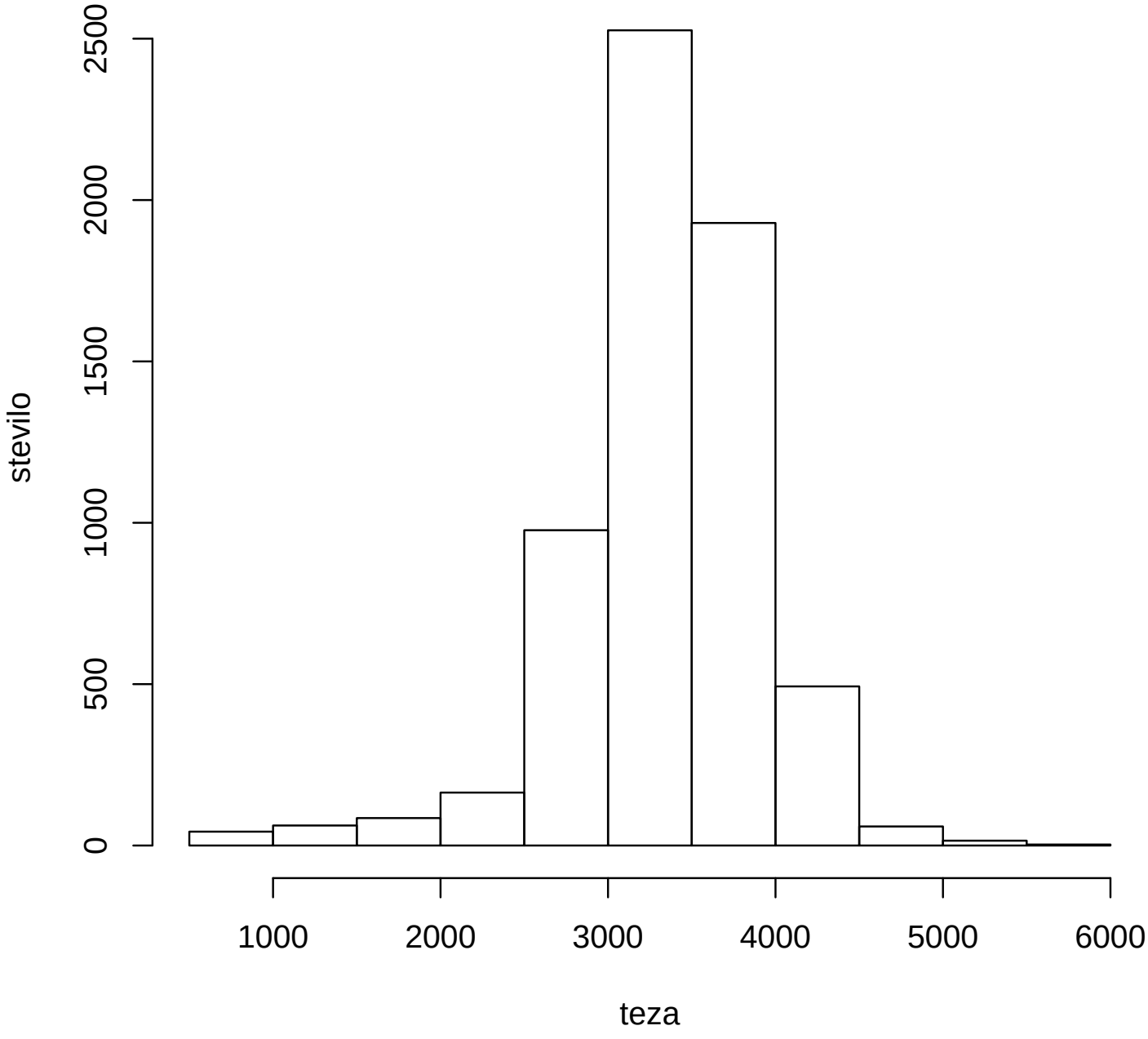
Pie Charts

Bar Charts

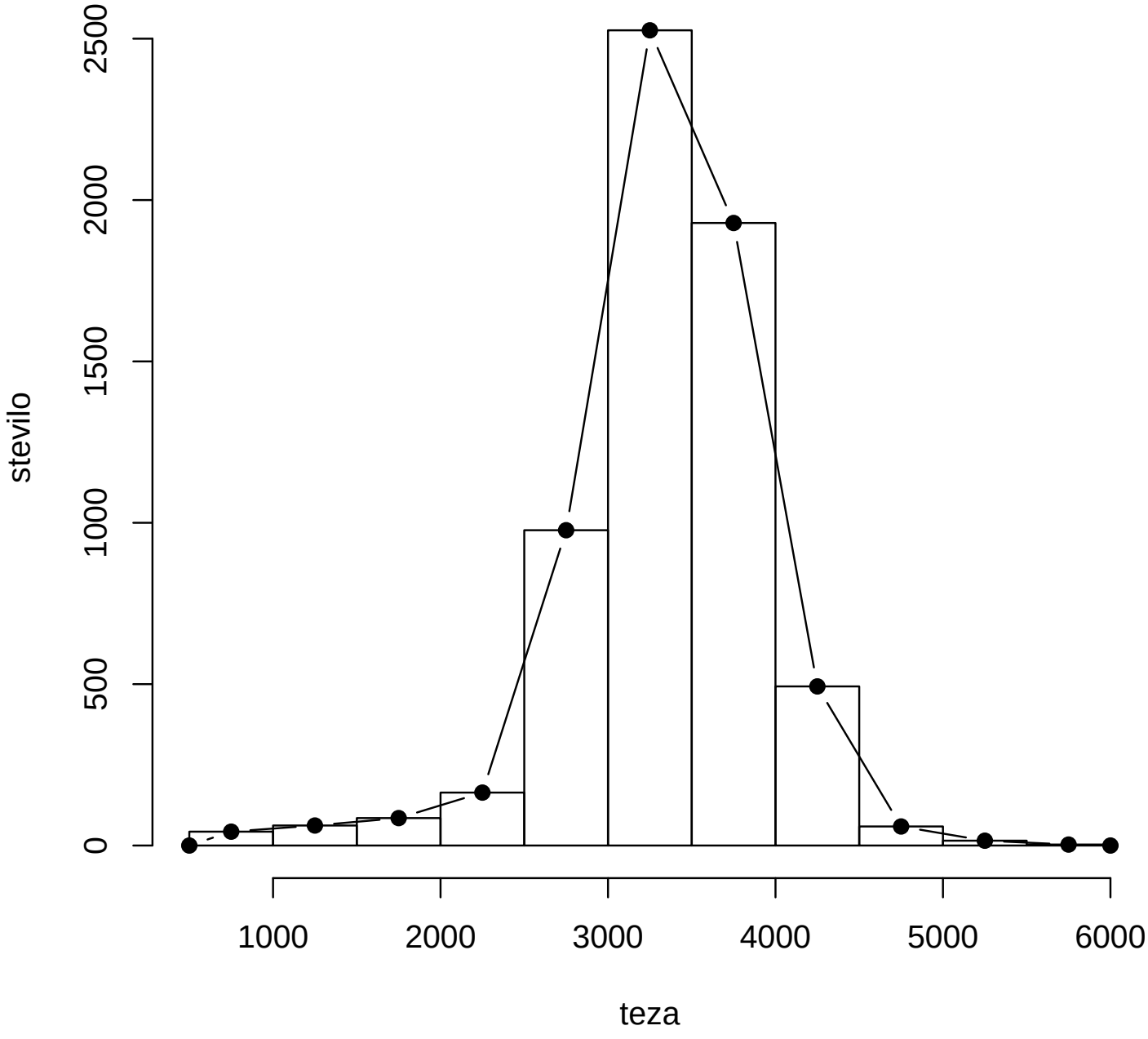
Točkovni diagram



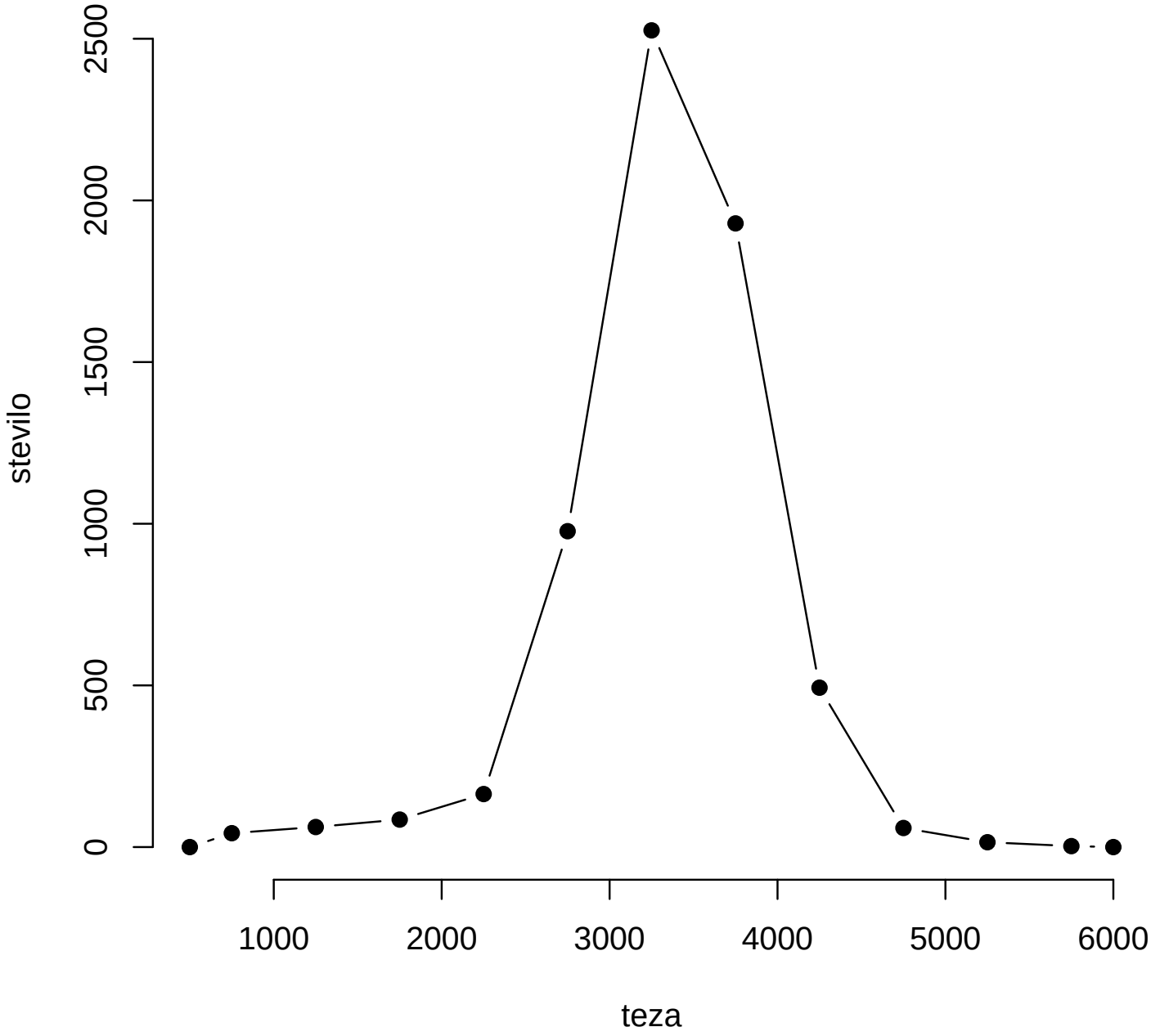
Histogram in frekvenčni poligon



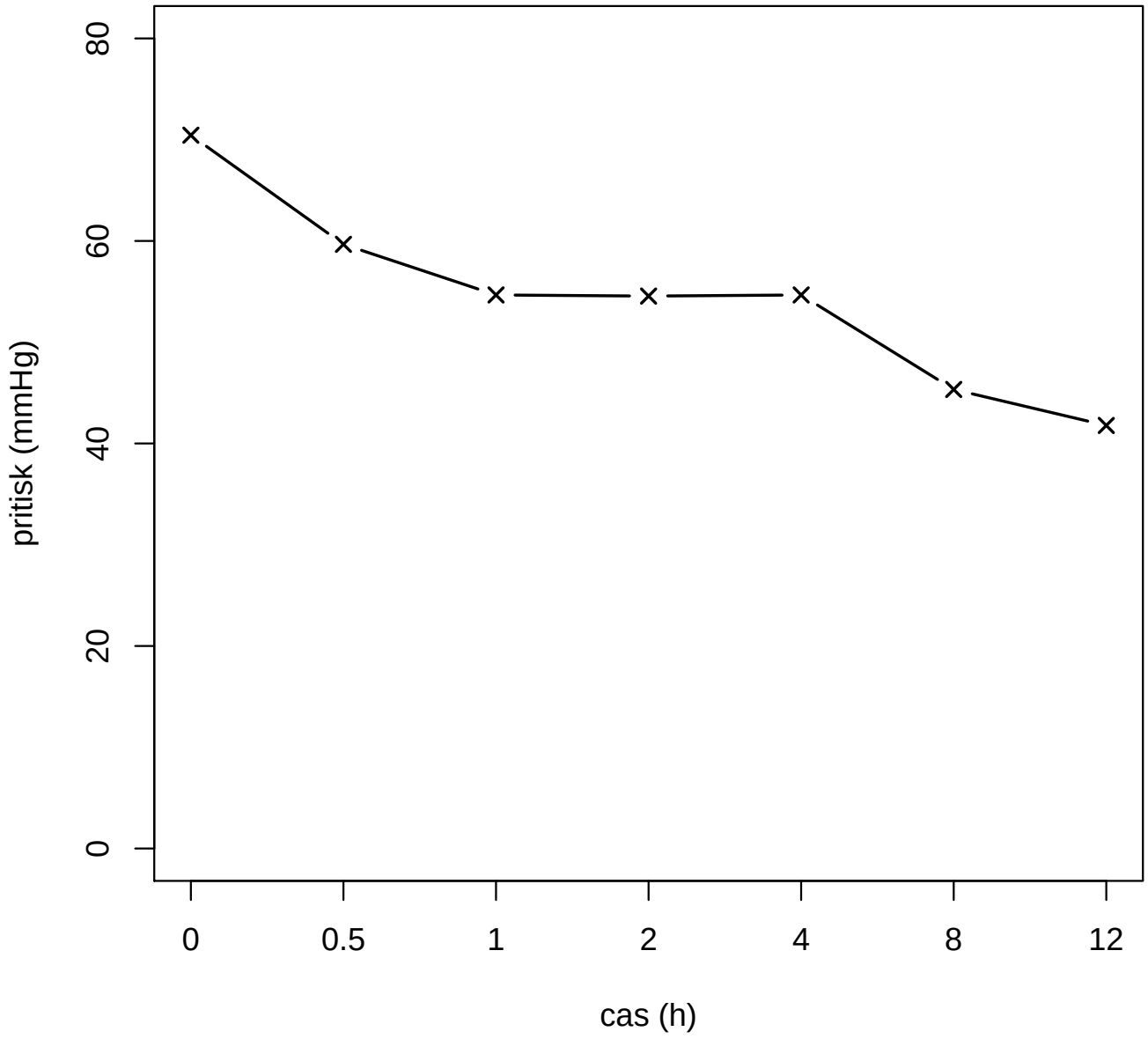
Histogram in frekvenčni poligon



Histogram in frekvenčni poligon



Linijski diagram

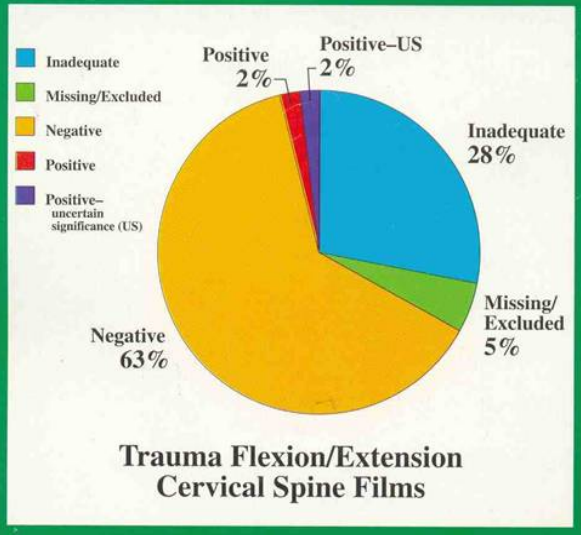


Volume 52 ▪ Number 1 ▪ January 2002

LIPPINCOTT
WILLIAMS
& WILKINS

The Journal of TRAUMA®

Injury, Infection, and Critical Care



Trauma Flexion/Extension Cervical Spine Films

American Association for the Surgery of Trauma
Eastern Association for the Surgery of Trauma
Trauma Association of Canada/L'Association Canadienne de Traumatologie
Western Trauma Association

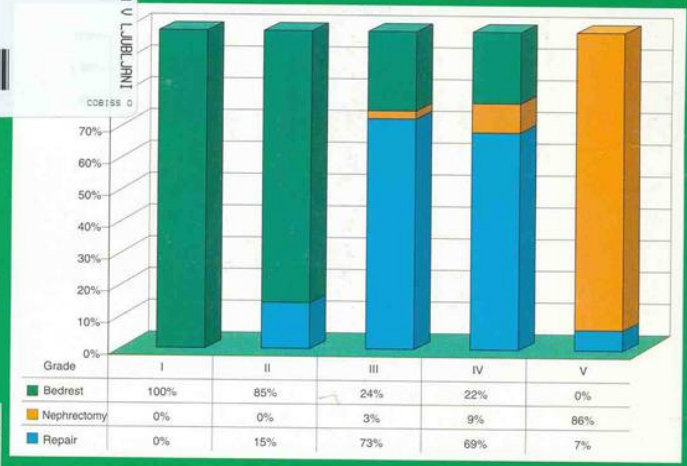
www.jtrauma.com

Volume 50 ▪ Number 2 ▪ February 2001

LIPPINCOTT WILLIAMS & WILKINS

The Journal of TRAUMA®

Injury, Infection, and Critical Care



Grade	I	II	III	IV	V
Bedrest	100%	85%	24%	22%	0%
Nephrectomy	0%	0%	3%	9%	86%
Repair	0%	15%	73%	69%	7%

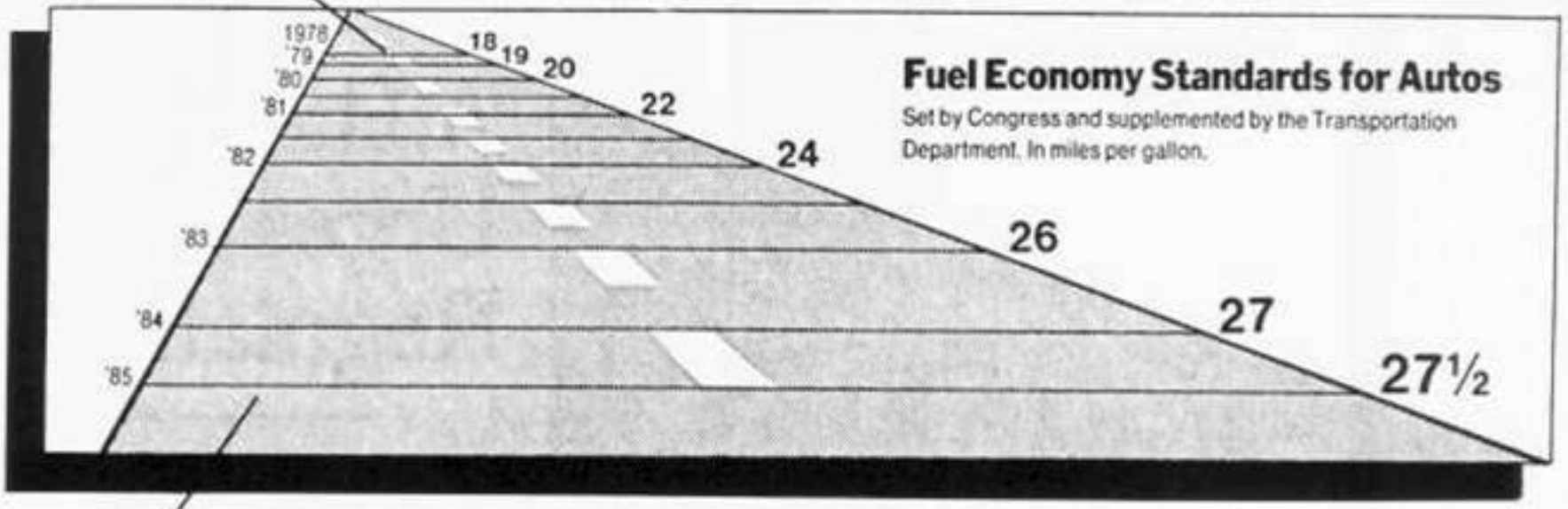
American Association for the Surgery of Trauma
Eastern Association for the Surgery of Trauma
Trauma Association of Canada/L'Association Canadienne de Traumatologie
Western Trauma Association

THE AMERICAN ASSOCIATION FOR THE SURGERY OF TRAUMA

www.jtrauma.com

En lažniv graf

This line, representing 18 miles per gallon in 1978, is 0.6 inches long.



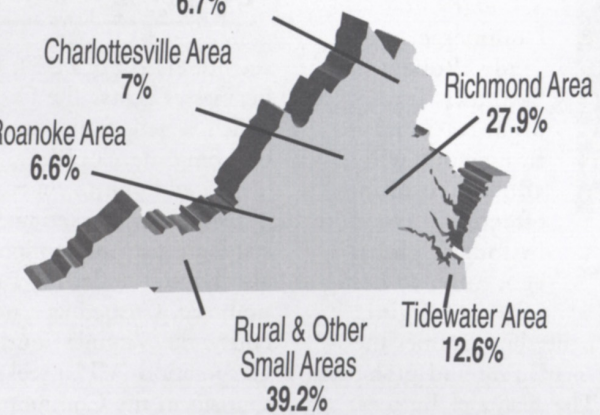
This line, representing 27.5 miles per gallon in 1985, is 5.3 inches long.

New York Times, August 9, 1978, p. D-2.

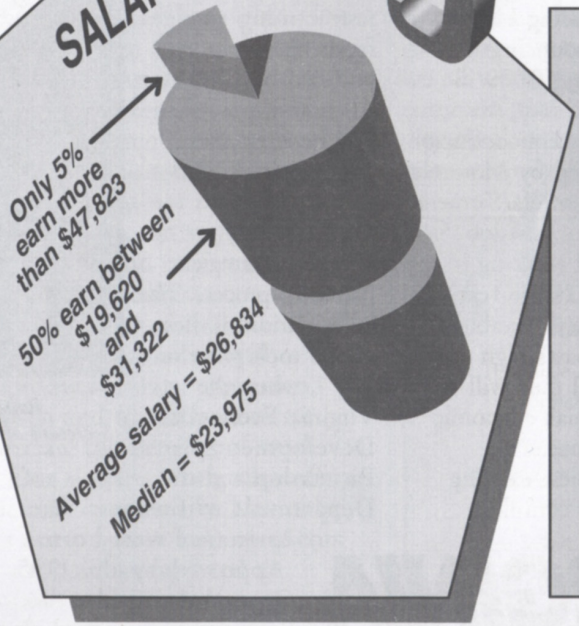
Who are Virginia's state employees?

Virginia's employees oversee the health and well-being of the Commonwealth's residents, its infrastructure, and its cultural, historical and natural resources. The statistics represented here provide an overview of the diversity of the state's work force by highlighting several areas of employee information, including location, salary, race, sex, occupational group, grade, age, and length of service with the state. These figures represent non-faculty, classified state employees only.

LOCATION



SALARY

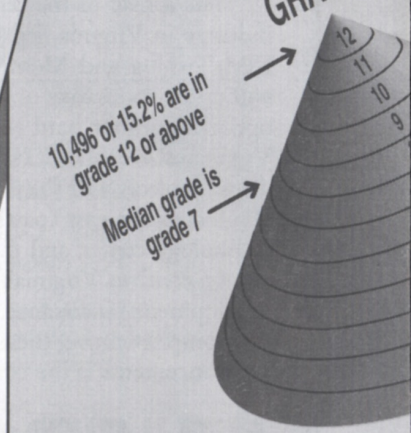


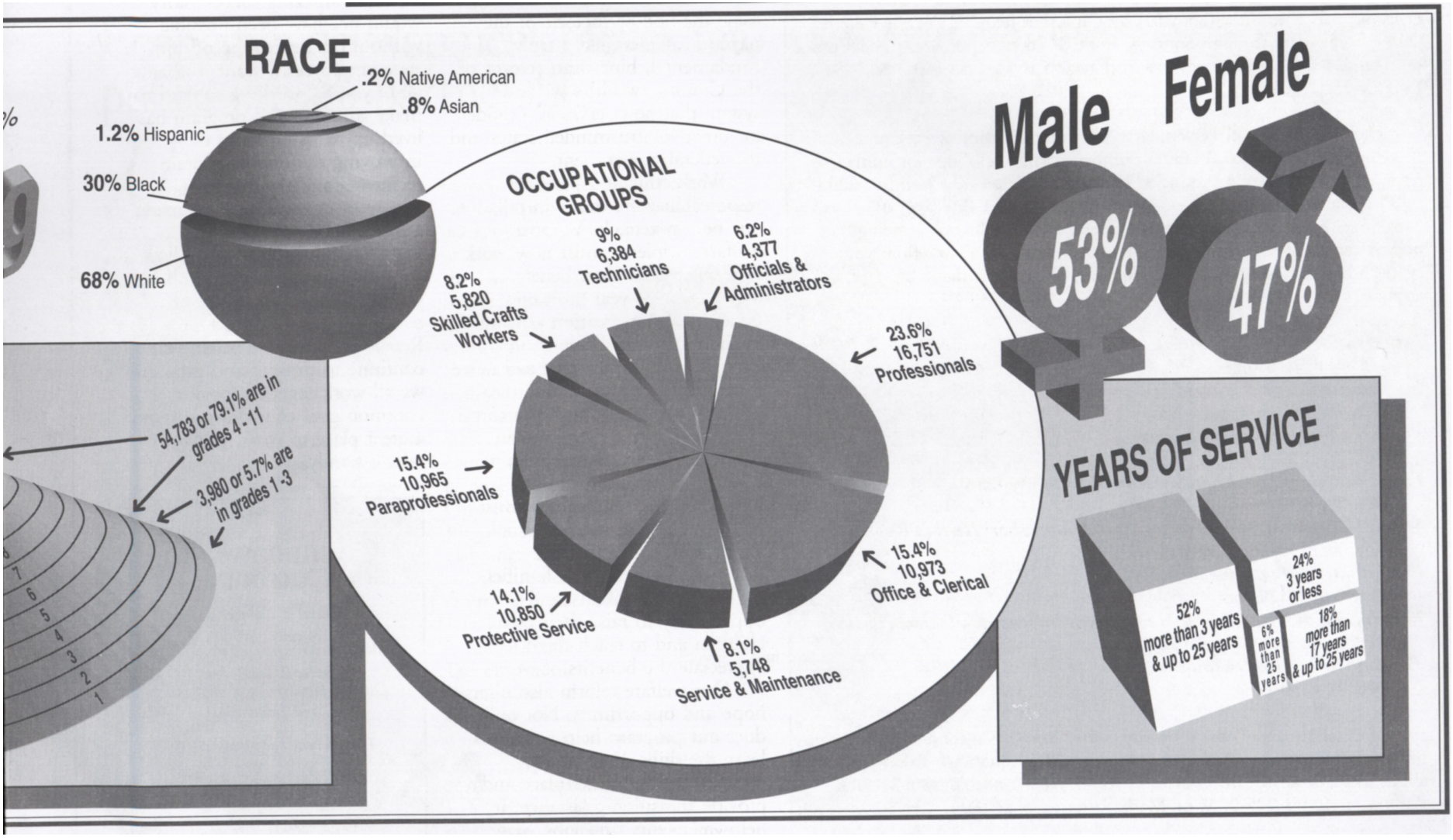
ONLY 7% ARE **27** AND UNDER

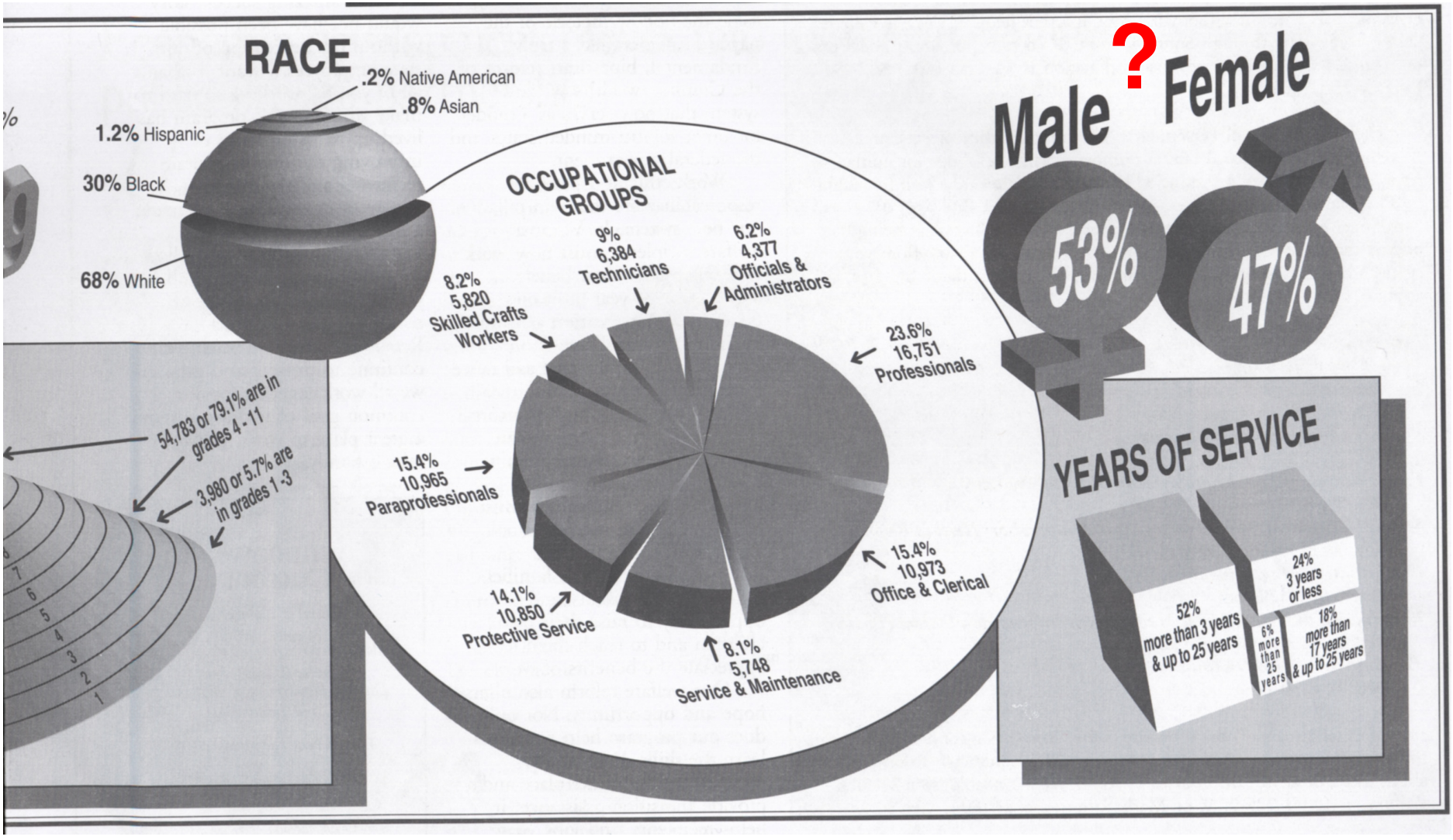
MEDIAN AGE IS **43**

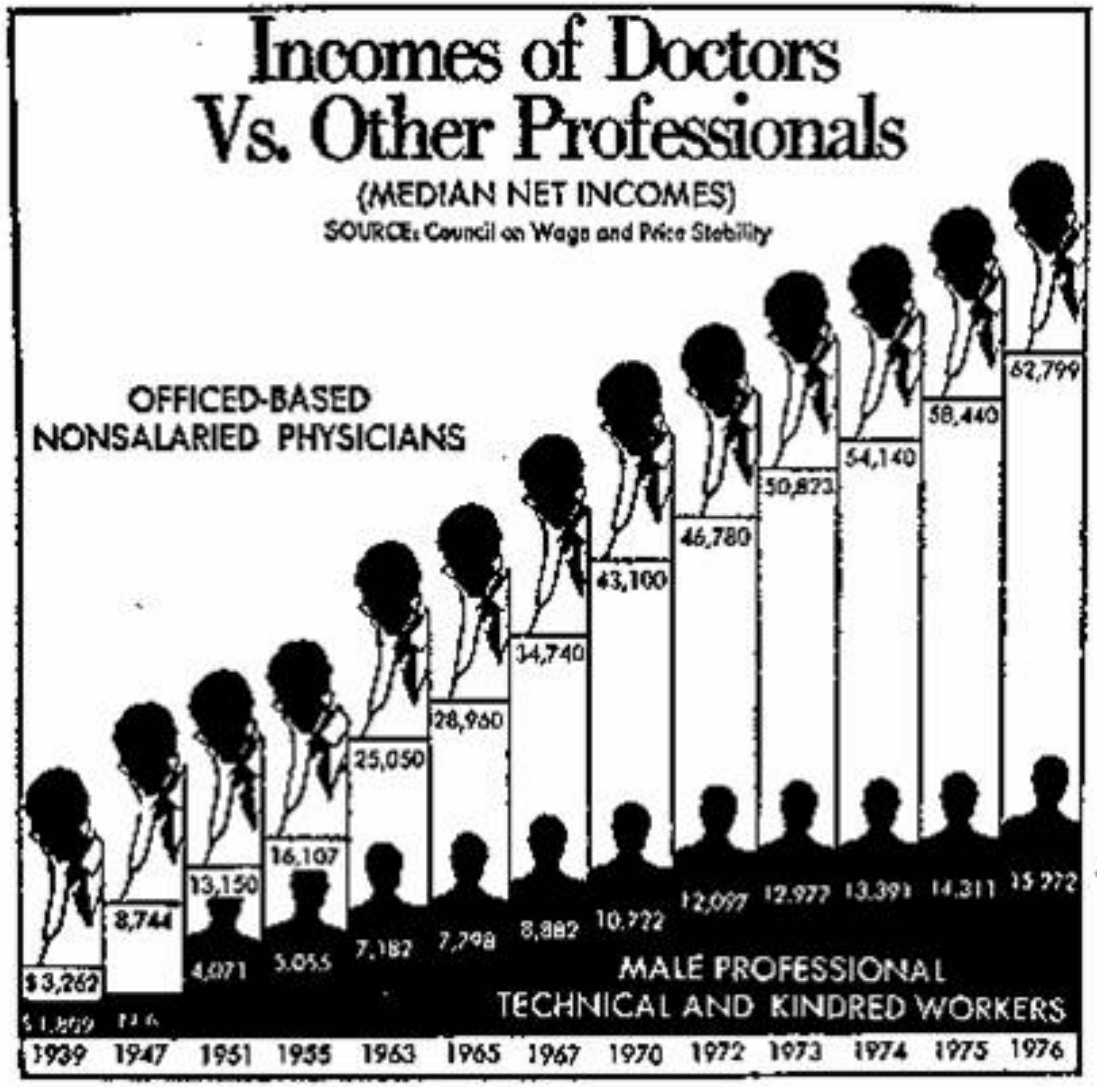
THE AGE OF 50 IS BETWEEN **35-4**

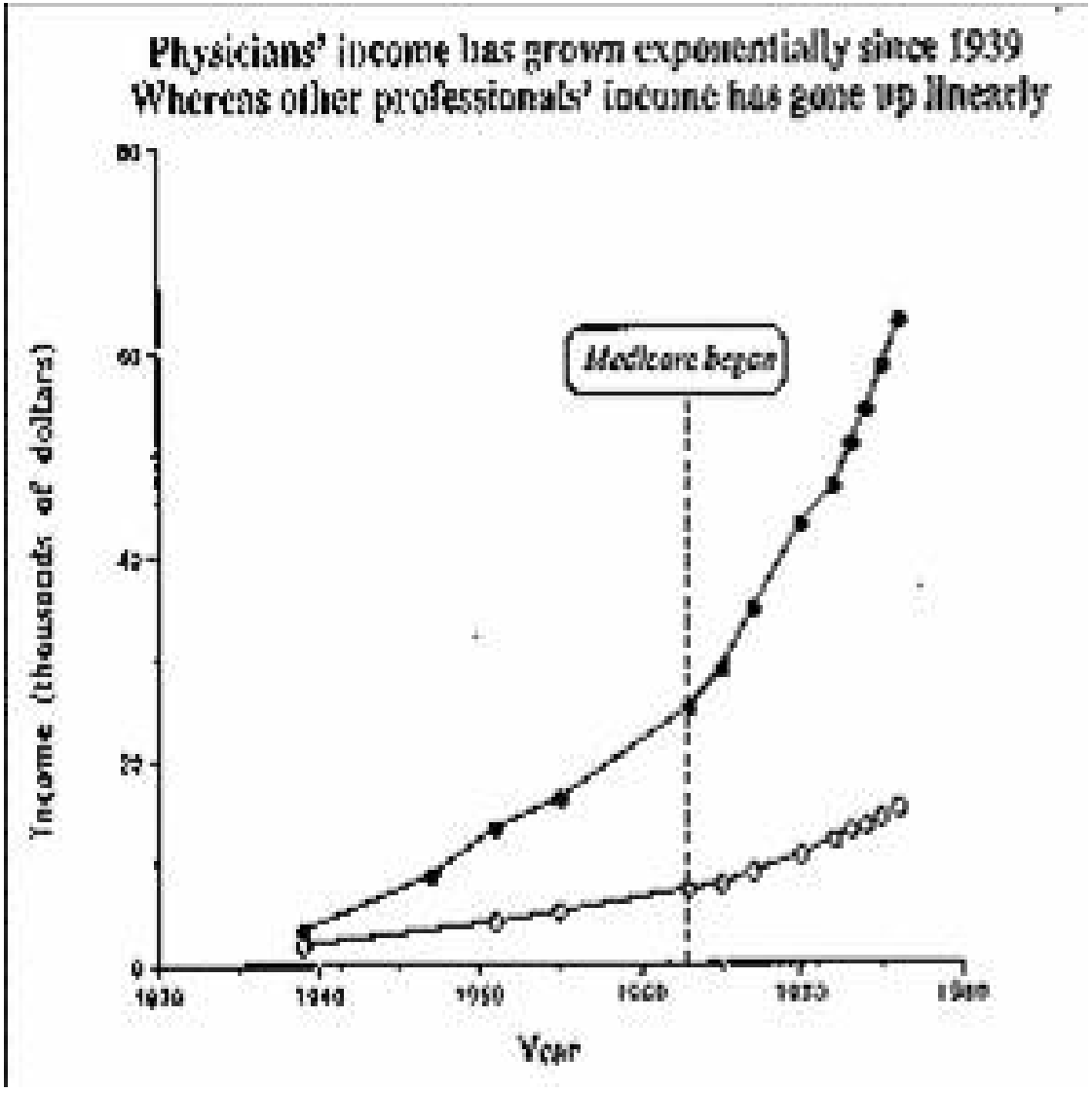
GRADE




RACE
.2% Native American
.8% Asian
1.2% Hispanic
30% Black
68% White
OCCUPATIONAL GROUPS
9%
6,384
Technicians
6.2%
4,377
Officials & Administrators
8.2%
5,820
Skilled Crafts Workers
23.6%
16,751
Professionals
15.4%
10,965
Paraprofessionals
15.4%
10,973
Office & Clerical
14.1%
10,850
Protective Service
8.1%
5,748
Service & Maintenance
54,783 or 79.1% are in grades 4 - 11
3,980 or 5.7% are in grades 1 -3
Male
Female
53%
47%
YEARS OF SERVICE
52%
more than 3 years & up to 25 years
24%
3 years or less
6%
more than 25 years
18%
more than 17 years & up to 25 years


RACE
.2% Native American
.8% Asian
1.2% Hispanic
30% Black
68% White
54,783 or 79.1% are in grades 4 - 11
3,980 or 5.7% are in grades 1 -3
OCCUPATIONAL GROUPS
9%
6,384
Technicians
6.2%
4,377
Officials & Administrators
8.2%
5,820
Skilled Crafts Workers
23.6%
16,751
Professionals
15.4%
10,965
Paraprofessionals
15.4%
10,973
Office & Clerical
14.1%
10,850
Protective Service
8.1%
5,748
Service & Maintenance
Male ? Female
53%
47%
YEARS OF SERVICE
52%
more than 3 years & up to 25 years
24%
3 years or less
6%
more than 25 years
18%
more than 17 years & up to 25 years


Incomes of Doctors
Vs. Other Professionals
(MEDIAN NET INCOMES)
SOURCE: Council on Wage and Price Stability
OFFICED-BASED
NONSALARIED PHYSICIANS
$3,262
8,744
13,150
16,107
25,050
28,960
34,740
43,100
46,780
50,823
54,140
58,440
62,799
MALE PROFESSIONAL
TECHNICAL AND KINDRED WORKERS
4,071
5,055
7,182
7,798
8,882
10,722
12,097
12,977
13,391
14,311
15,272
1939
1947
1951
1955
1963
1965
1967
1970
1972
1973
1974
1975
1976

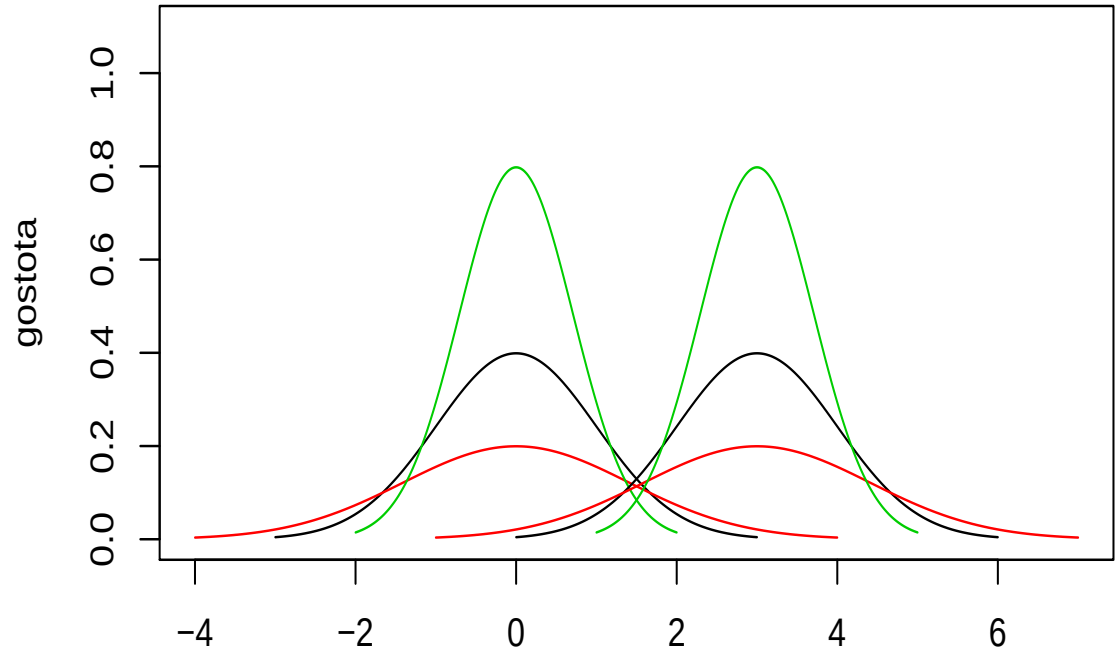

Physicians' income has grown exponentially since 1939
Whereas other professionals' income has gone up linearly
Income (thousands of dollars)
Medicare began
Year

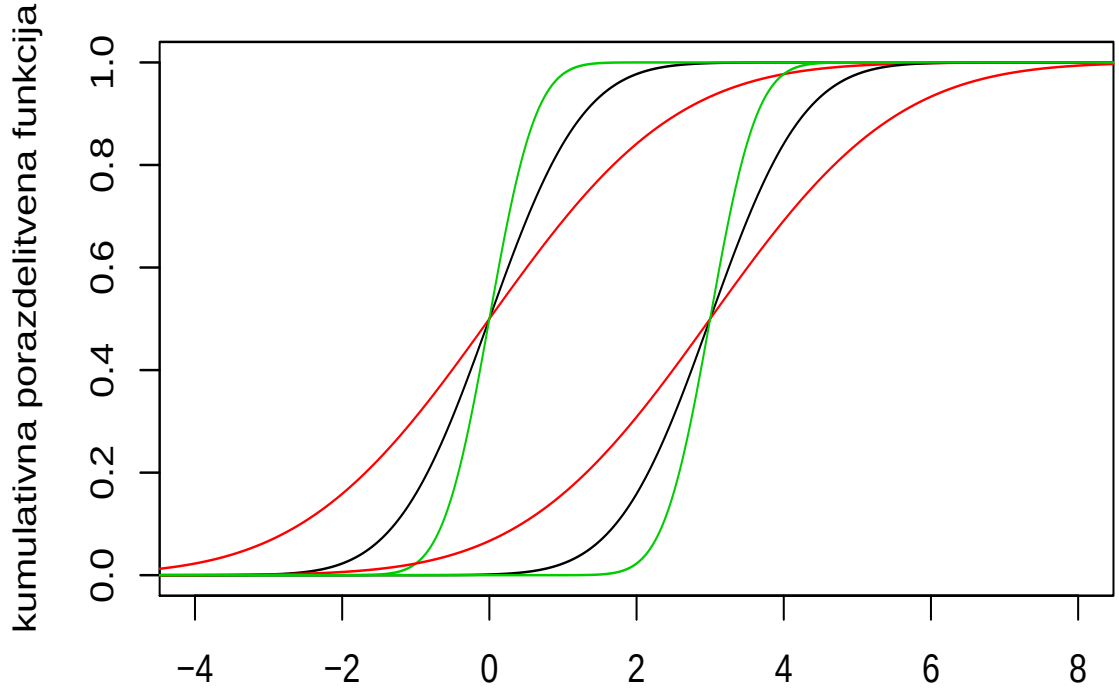
NORMALNA PORAZDELITEV

Normalna, ali Gaussova, porazdelitev je najpomembnejša teoretična porazdelitev. Njena gostota je podana s funkcijo

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

Funkcija je torej popolnoma določena z dvema parametroma, **povprečjem** (**pričakovano vrednostjo**) μ in **varianco** σ^2. Dejstvo, da je slučajna spremenljivka X normalno porazdeljena s povprečjem μ in varianco σ^2, zapišemo kot $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Funkcija je **simetrična** okrog μ, torej je povprečje enako mediani. Če spreminjamo μ, se graf gostote premika po x osi, če pa spreminjamo σ^2, se spreminja oblika zvona na sredini. Naslednja slika ilustrira ti dve preprosti dejstvi. Dodani so tudi grafi porazdelitvene funkcije. Na levih delih grafov so predstavljene funkcije s povprečjem 0 in različnimi variancami, na desnih je povprečje 3.


gostota
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−4
−2
0
2
4
6


kumulativna porazdelitvena funkcija
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−4
−2
0
2
4
6
8

Če je X normalno porazdeljena z $E(X) = \mu$ in $Var(X) = \sigma^2$, je

$$Y = a + b \cdot X$$

tudi normalno porazdeljena z

$$E(Y) = a + b\mu \quad \text{in} \quad Var(Y) = b^2\sigma^2.$$

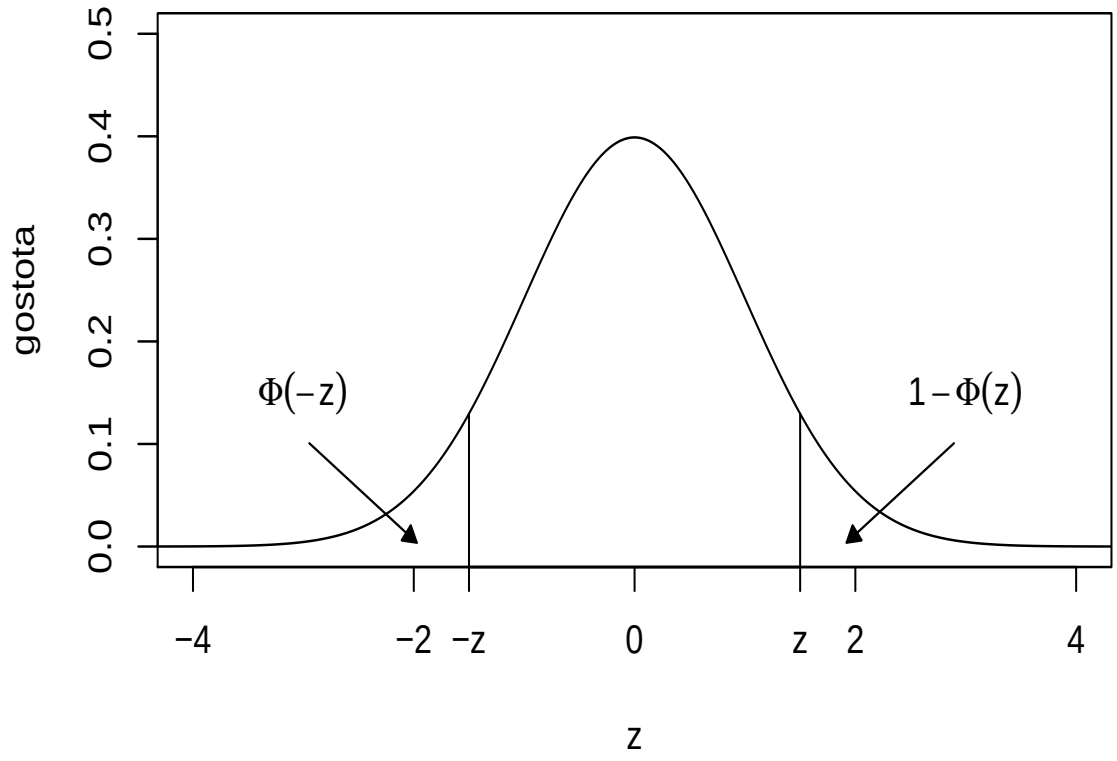
Standardizirana spremenljivka

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \cdot X$$

je potem normalno porazdeljena z

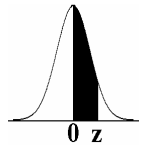
$$E(Z) = 0 \quad \text{in} \quad Var(Z) = 1.$$

Gostoto standardizirane normalne porazdelitve ponavadi označujemo s φ, njeno porazdelitveno funkcijo pa s Φ.



Standardizirana normalna porazdelitev je tabelirana v statističnih tabelah, tipično za pozitivne z med 0 in 3 in z z podanim na dve decimalki natančno. Tabele se razlikujejo po tem, kateri del ploščine, ki pripada z, tabelirajo: nekatere ploščino levo od z, druge desno od z, spet tretje ploščino v repih porazdelitve skupaj (torej desno od z in levo od $-z$) in tako naprej. Upoštevaje dejstvo, da je φ simetrična okrog 0 in da je celotna ploščina pod njo enaka 1, lahko vsako tabelo spremenimo v vsako drugo in so si torej enakovredne. In zato nam tudi ni treba tabelirati vrednosti za negativne z. Naslednja prosojnica prikazuje eno takšnih tabel.

Površina pod standardizirano normalno krivuljo



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Poglejmo si **primer**:

Naj bo X normalno porazdeljena z $\mu = 10$ in $\sigma = 2$, torej $X \sim \mathcal{N}(10, 2^2)$. **Vprašanje 1**: Koliko je $P(7{,}9 < X \leq 11)$?

Za izračun uporabimo dejstvo, da je $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ standardizirano normalno porazdeljena!

$$\begin{aligned} P(7{,}9 < X \leq 11) &= P\left(\frac{7{,}9-10}{2} < \frac{X-10}{2} \leq \frac{11-10}{2}\right) \\ &= P(-1{,}05 < Z \leq 0{,}5) \\ &= P(Z \leq 0{,}5) - P(Z \leq -1{,}05) \\ &= P(Z \leq 0{,}5) - [1 - P(Z \leq 1{,}05)] \\ &= 0{,}6915 - [1 - 0{,}8531] = 0{,}5446. \end{aligned}$$

Iz naše tabele smo za ustrezne verjetnosti sicer dobili 0,1915 in 0,3531, ki pa smo jima prišteli 0,5.

Vprašanje 2: Koliko je tretji kvartil za X?

Določiti moramo torej vrednost a, za katero velja

$$P(X \leq a) = 0{,}75.$$

Zopet uporabimo dejstvo, da je $Z = (X - 10)/2$ standardizirana normalna spremenljivka. Potem je gornja zahteva isto kot

$$P\left(Z \leq \frac{a - 10}{2}\right) = 0{,}75.$$

Iz tabele vidimo, da je približno 25% vrednosti med 0 in 0,67, kar pomeni, da jih je levo od 0,67 približno 75%. Ustrezen z je torej 0,67, se pravi, da iz $(a - 10)/2 \approx 0{,}67$ sledi, da je

$$a = 10 + 2 \cdot 0{,}67 = 11{,}34.$$

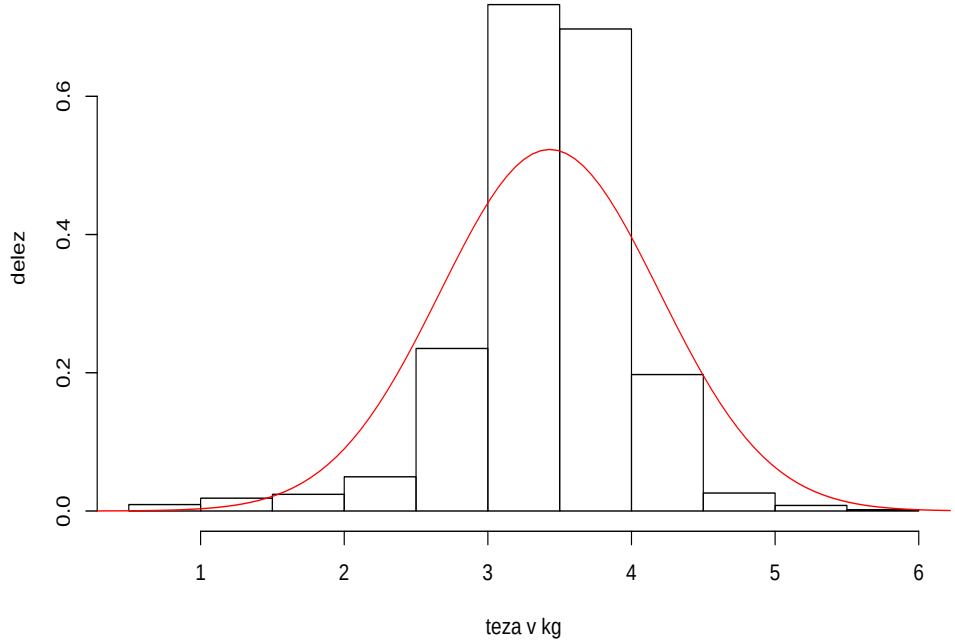
Kot bomo videli kasneje, nas v statistiki posebej zanimajo nekatere vrednosti z. Najpogosteje se srečamo z vrednostjo, pri kateri v repih porazdelitve ostane še 5% vseh vrednosti. To se zgodi pri $z = \mathbf{1{,}96}$, kar je številka, ki si jo velja zapomniti. V spodnji tabeli je poleg te še nekaj zanimivih vrednosti.

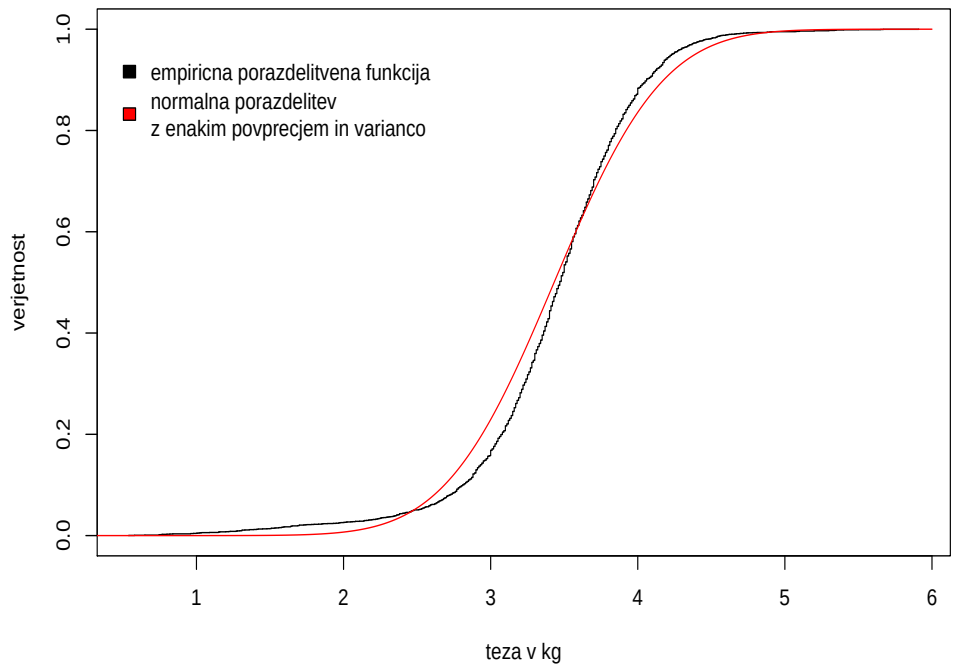
x	$P(X > \mu + x) + P(X < \mu - x)$
0	1
σ	0,3174
$1{,}96 \cdot \sigma$	0,05
$2 \cdot \sigma$	0,0455
$3 \cdot \sigma$	0,0027
$4 \cdot \sigma$	0,00006334

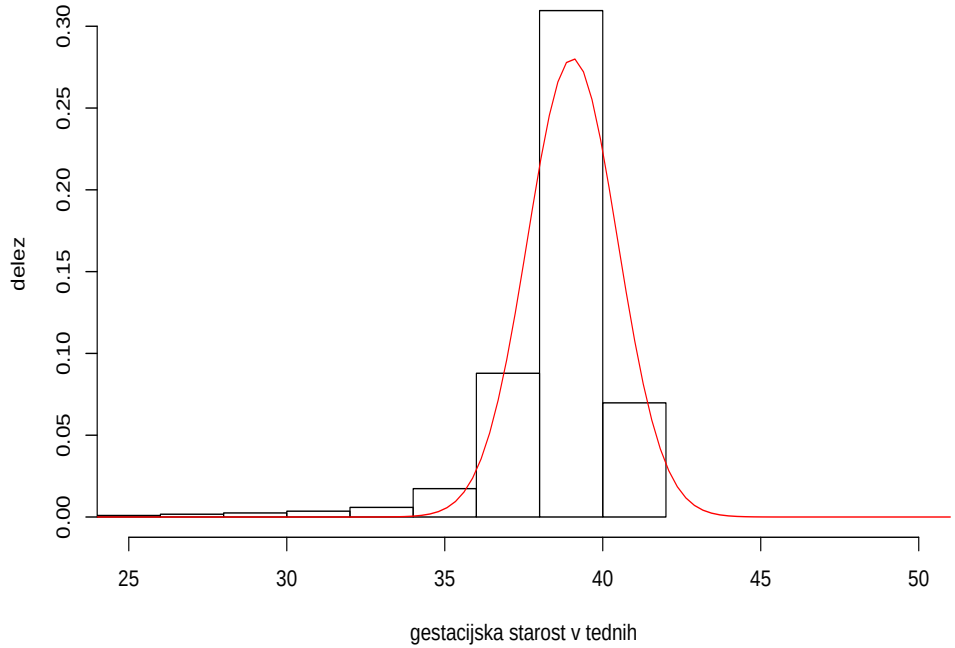
Q-Q grafi

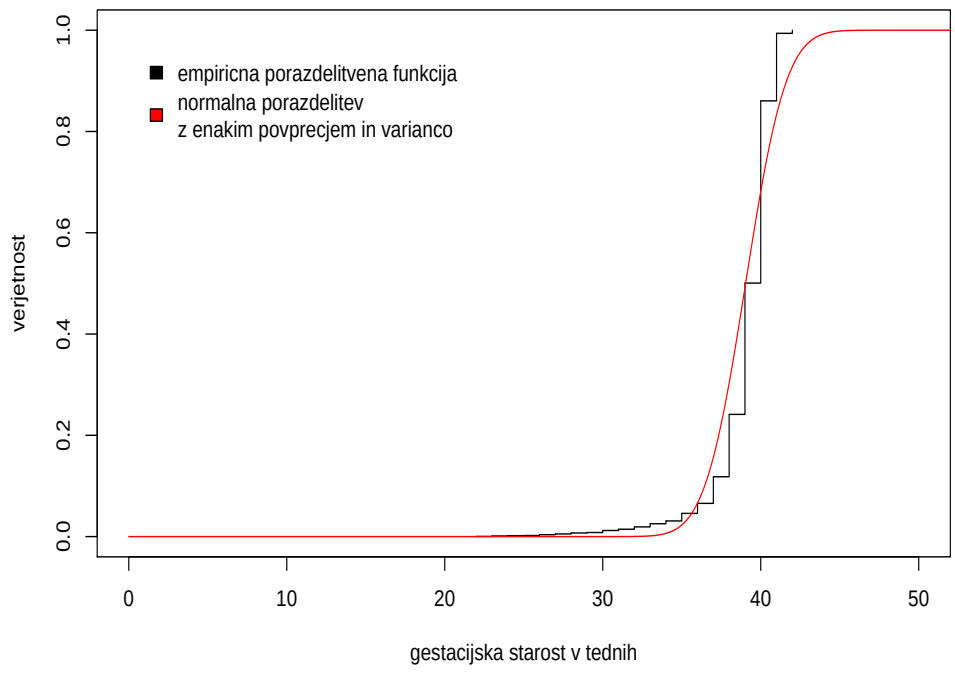
Q-Q graf je eden od grafičnih načinov preverjenja predpostavke, da je neka spremenljivka normalno porazdeljena. Načeloma naj bi bilo to razvidno tudi iz grafa kumulativne porazdelitvene funkcije ali iz histograma, vendar oba načina nista preveč občutljiva na odstope od normalne porazdelitve.

Naslednja dva primera to ilustrirata.


delez
0.0
0.2
0.4
0.6
1
2
3
4
5
6
teza v kg

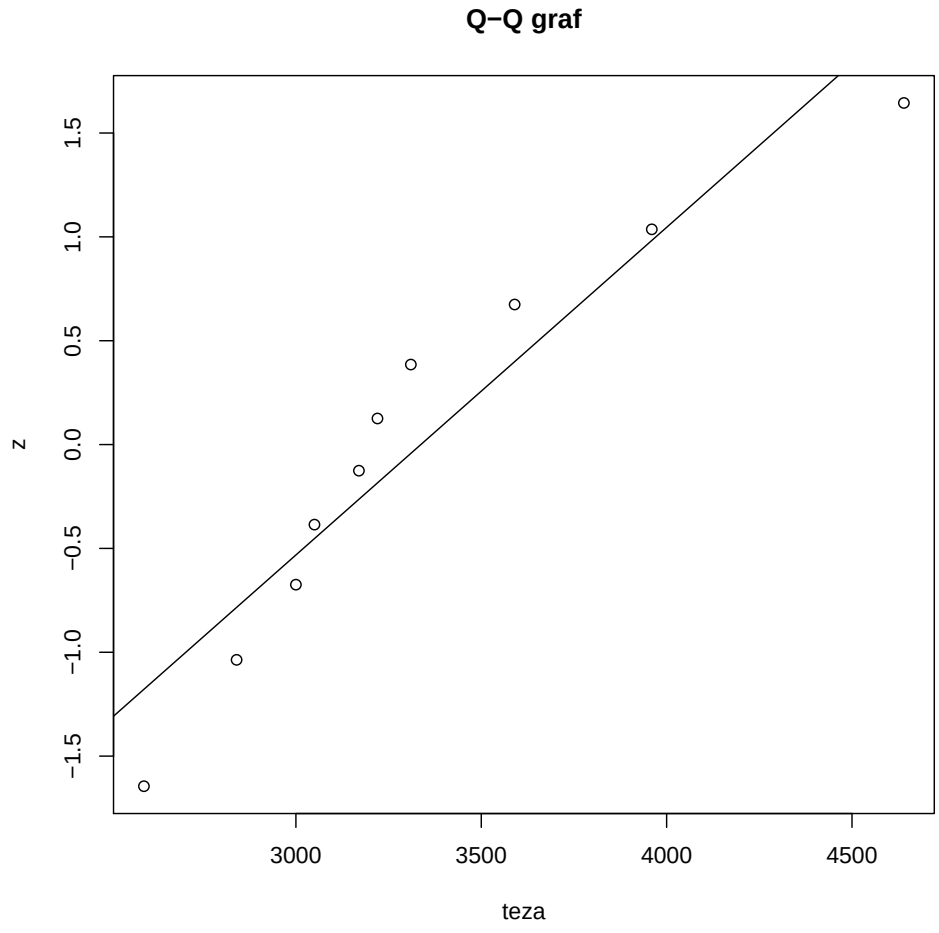

empiricna porazdelitvena funkcija
normalna porazdelitev
z enakim povprecjem in varianco
verjetnost
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1
2
3
4
5
6
teza v kg

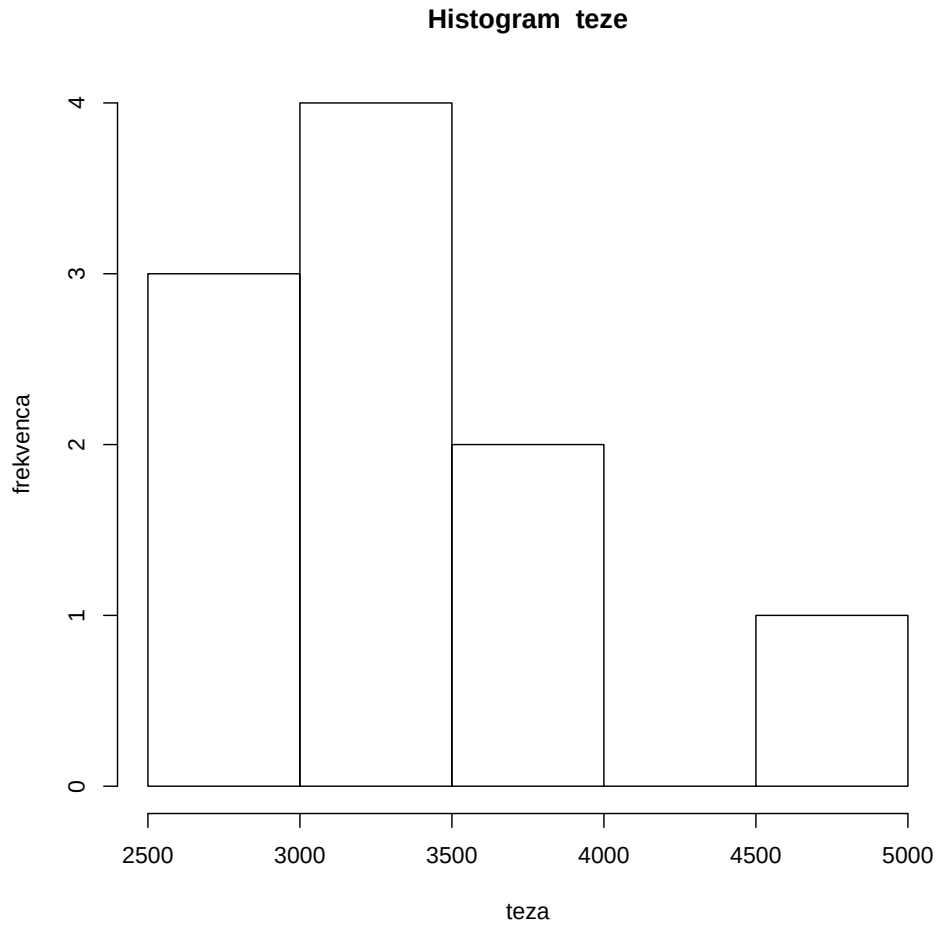

delez
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
25
30
35
40
45
50
gestacijska starost v tednih


empiricna porazdelitvena funkcija
normalna porazdelitev
z enakim povprecjem in varianco
verjetnost
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
10
20
30
40
50
gestacijska starost v tednih

Princip Q-Q grafov je na kratko tale: na abscisno os nanesemo izmerjene vrednosti, na ordinatno pa ustrezne z vrednosti, ki bi pripadale x-om glede na njihov rang ob predpostavki, da je X normalno porazdeljena spremenljivka. Ustrezni graf mora biti približno linearen, ker je teoretično $z = (x - \mu)/\sigma$.

Primer: Tule je 10 naključno izbranih vrednosti porodnih tež dečkov, rojenih v 38. tednu nosečnosti: 2590, 2840, 3000, 3050, 3170, 3220, 3310, 3590, 3960, 4640. Če naj bi prihajale te vrednosti iz normalne porazdelitve, potem prvi vrednosti pripada tisti z, pod katerim leži 1/10 vseh vrednosti, drugi tisti, pod katerim je 2/10 vseh vrednosti in tako naprej. No, ker bi za zadnjo vrednost dobili 1 ($= 10/10$), stvar nekoliko popravimo in namesto i/10 uporabljamo $(i - 0{,}5)/10$ (obstajajo tudi bolj kompliciranipristopi).


Q−Q graf
z
teza
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
3000
3500
4000
4500


Histogram teze
frekvenca
0
1
2
3
4
2500
3000
3500
4000
4500
5000
teza