1.3 Vsota diskretnih slučajnih spremenljivk

Naj bosta X in Y neodvisni Bernoullijevo porazdeljeni spremenljivki, $B(p)$.

- Kako je porazdeljena njuna vsota?
- Kako pravimo porazdelitvi vsote n neodvisnih enako porazdeljenih (i.i.d.) Bernoullijevih spremenljivk?

Predlogi za vaje v R-u:

- S pomočjo funkcije `sample` generirajte po 100 realizacij dveh Bernoullijevih spremenljivk in si oglejte porazdelitev njune vsote. Ponovite še za vsote 20 Bernoullijevih spremenljivk.

1.4 Vsota zveznih slučajnih spremenljivk

Poleg posamičnih vrednosti, želijo pri športnikih proučevati tudi zaporedje večih meritev. Zanima nas porazdelitev vsote kvadriranih standardiziranih odmikov od povprečja pri ničelni domnevi, da športnik ni kriv. Naj bo torej Z standardizirani odmik od povprečja (po predpostavki normalno porazdeljen), zanima nas $\sum Z^2$ (gledamo vsoto kvadriranih odmikov, saj so vrednosti lahko negativne ali pozitivne). Pri tem predpostavimo, da so bile meritve narejene v dovolj velikih časovnih presledkih, da so vrednosti med seboj neodvisne.

- Najprej nas zanima, kako je porazdeljena vsota dveh neodvisnih zveznih spremenljivk (izpeljite formulo za dve zvezni spremenljivki, torej $Z = X + Y$, primerjajte jo s formulo za diskretne)
- Kako se porazdeljuje $S = Z_1^2 + Z_2^2$, če sta spremenljivki Z_1 in Z_2 porazdeljeni standardno normalno in med seboj neodvisni?
  Namig: Uporabite rezultat
  $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)x}} dx = \pi$$
- Denimo, da so športnikovi standardizirani odmiki (vrednosti Z) na petih merjenjih naslednji: $1{,}6; 1{,}5; -1{,}6; 1{,}8; 1{,}4$. Kaj lahko sklepamo?

Predlogi za vaje v R-u:

- Generirajte 10 vrednosti iz porazdelitve $X \sim N(148{,}85)$, te vrednosti naj predstavljajo 10 meritev pri enem športniku. Vrednosti standardizirajte (tako da dobite $N(0{,}1)$ spremenljivko), kvadrirajte in seštejte. To naj bo vrednost za prvega športnika, na enak način generirajte vrednosti za 1000 športnikov. Narišite histogram vrednosti. S pomočjo funkcije `pgamma` poiščite mejo, ki jo porazdelitev $\Gamma(\frac{10}{2}, \frac{1}{2})$ preseže z verjetnostjo manj kot 0,01 in izračunajte delež športnikov na vašem vzorcu, ki presežejo to mejo.

- Recimo, da ima dopingiran športnik enako povprečje, a večjo varianco (vrednosti bolj nihajo, saj manipulira s krvjo). Generirajte 1000 športnikov z večjo varianco in si oglejte, kakšen delež bo presegel meje iz prejšnje točke.

1.5 Vsota normalnih spremenljivk

Pokazali smo že, da je linearna transformacija normalno porazdeljene spremenljivke zopet normalno porazdeljena. V tej vaji bomo pokazali, da je vsota dveh neodvisnih (standardiziranih) normalnih spremenljivk zopet normalno porazdeljena. Nato bomo pokazali še protiprimer, ko vsota dveh odvisnih normalnih spremenljivk ni več normalna.

- Naj bosta $X \sim N(0{,}1)$ in $Y \sim N(0{,}1)$ in med seboj neodvisna. Kako je porazdeljena njuna vsota?

- Naj bosta X in Y neodvisni standardizirani normalni spremenljivki, Z pa enaka $|Y|$, če je $X \geq 0$, in $Z = -|Y|$ če je $X < 0$. Kako je porazdeljena spremenljivka Z?

- Skicirajte skupno porazdelitev spremenljivk X in Z. Ali sta spremenljivki neodvisni?

- Ali je vsota $X + Z$ porazdeljena normalno?