Uvod v Bayesovsko statistiko

Gregor Gorjanc

Univerza v Ljubljani, Biotehniška Fakulteta, Oddelek za zootehniko,
Katedra za znanosti o rejah živali

Ljubljana (IBMI), 2013

Okvirni vozni red

Uvod

Osnove verjetnosti

Verjetje

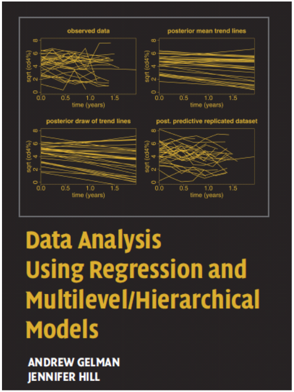
Bayesovski pristop

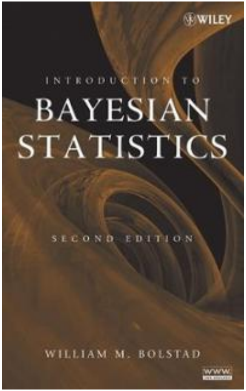
Metode MCMC

0. Uvod

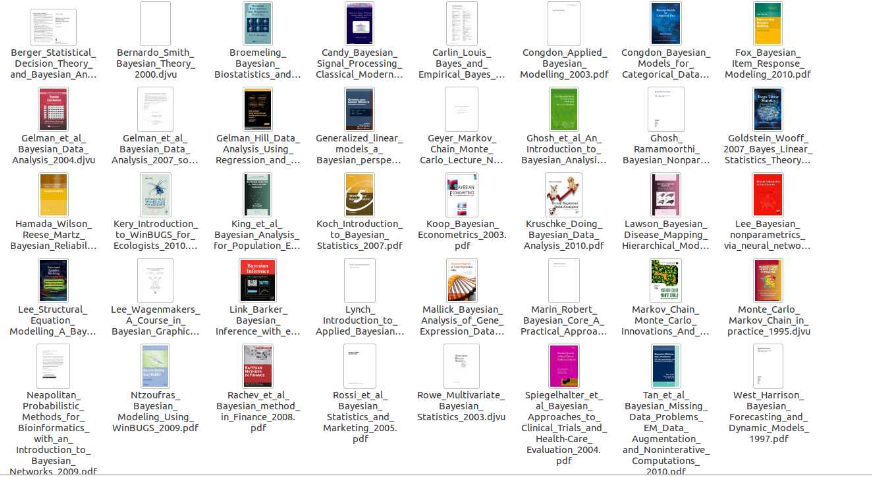
- Zgodovina (Laplace in Bayes)
- Moje izkušnje (genetika)
- Poimenovanje?
  - Bayesova
  - Bayesovska
- Bayesian = "probabilistic modelling"

Nekaj literature



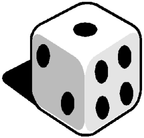


Literature je več kot dovolj



1. Osnove verjetnosti

Verjetnost



- Mečemo kocko
- Dva pogleda na verjetnost:
  - verjetnost dogodka, da pade 6 pik: $\Pr(6\,pik) = 1/6$
  - mečemo kocko in spremljamo frekvenco (= verjetnost) dogodkov
- Porazdelitev verjetnosti dogodkov, $\sum_i \Pr(i\,pik) = 1$:

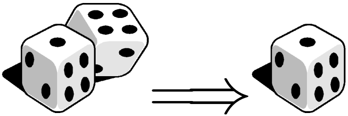
Št. pik	1	2	3	4	5	6
Verjetnost	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Skupna verjetnost (ang. joint prob.)

- Mečemo **dve** kocki
- Ali je št. pik na prvi kocki povezano s št. pik na drugi kocki? NE. –> Dogodka sta torej neodvisna.
- Verjetnost skupnega dogodka, da pade dvakrat 6 pik: $\Pr(6\,pik,\,6\,pik) = \Pr(6\,pik) \times \Pr(6\,pik) = 1/6 \times 1/6 = 1/36$
- Porazdelitev verjetnosti dogodkov, $\sum_{i,j} \Pr(i\,pik,\,j\,pik) = 1$:

Št. pik	1	2	3	4	5	6
1	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
2	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
3	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
4	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
5	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
6	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$

Robna verjetnost (ang. marginal prob.)

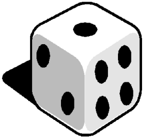


- Mečemo **dve** kocki
- Porazdelitev verjetnosti za število pik 1, 2, . . . 6:

Št. pik	1	2	3	4	5	6	Skupaj
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
Skupaj	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

$$\Pr(A) = \sum_B \Pr(A, B) \qquad p(a) = \int p(a, b)\, db$$

Skupna verjetnost II



- Mečemo **eno** kocko
- Ali je št. pik na kocki povezano z naravo števila (sodo ali liho)? DA. –> Dogodka sta torej odvisna.
- Verjetnost dogodka, da je število sodo in da pade 6 pik:

$$
\begin{aligned}
\Pr(6\,pik, sodo\,\check{s}t.) &= \Pr(6\,pik | sodo\,\check{s}t.) \times \Pr(sodo\,\check{s}t.) \\
\Pr(6\,pik, sodo\,\check{s}t.) &= 1/6 \\
\Pr(sodo\,\check{s}t.) &= 1/2 \\
\Pr(6\,pik | sodo\,\check{s}t.) &= \frac{\Pr(6\,pik, sodo\,\check{s}t.)}{\Pr(sodo\,\check{s}t.)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3
\end{aligned}
$$

- $\Pr(6\,pik | sodo\,\check{s}t.)$ –> Pogojna verjetnost (ang. conditional prob.)

Pogojna verjetnost (ang. conditional prob.)

- Verjetnost dogodka, da pade 6 pik, če vemo, da je padlo sodo število: $Pr(6\ pik|sodo\ število) = 1/3$
- Porazdelitev verjetnosti dogodkov, $\sum_i Pr\left(i\ pik|liho\ število\right) = 1$:

Liho število

Št. pik	1	2	3	4	5	6
Verjetnost	1/3	0	1/3	0	1/3	0

- Porazdelitev verjetnosti dogodkov, $\sum_i Pr\left(i\ pik|sodo\ število\right) = 1$:

Sodo število

Št. pik	1	2	3	4	5	6
Verjetnost	0	1/3	0	1/3	0	1/3

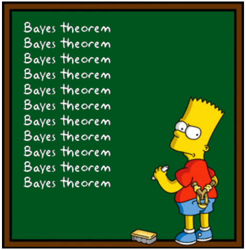
Bayesov teorem

$$
\begin{aligned}
\Pr(A, B) &= \Pr(A|B) \times \Pr(B) = \Pr(B|A) \times \Pr(A) \\
\Pr(A|B) &= \frac{\Pr(B|A) \times \Pr(A)}{\Pr(B)} \\
&= \frac{\Pr(B|A) \times \Pr(A)}{\sum_A \Pr(B|A) \times \Pr(A)} \\
\Pr(A|B) &\propto \Pr(B|A) \times \Pr(A)
\end{aligned}
$$

Vaja

Frekvenca obolelih v populaciji znaša 0.008. Obstaja test za določitev obolelosti, ki je lažno pozitiven v 10 % in lažno negativen v 5 %.

- Koliko znaša verjetnost, da ima posameznik bolezen, če je rezultat testa zanj pozitiven?
- Kakšen je vpliv predhodne (apriorne) informacije?
- Koliko znaša verjetnost, da ima posameznik bolezen, če je rezultat ponovljenega testa zanj ponovno pozitiven?



Vaja (rešitev)

Dogodki:

- status: zdrav, bolan
- test: negativen, pozitiven

Predhodna verjetnost obolelosti brez testa:

$$\Pr(bolan) = 0.008$$

Test:

	Status	
Test	Zdrav	Bolan
Negativen	$\Pr(negativen \vert zdrav) = 0.90$	$\Pr(negativen \vert bolan) = 0.05$
Pozitiven	$\Pr(pozitiven \vert zdrav) = 0.10$	$\Pr(pozitiven \vert bolan) = 0.95$
Skupaj	1	1

Vaja (rešitev) II

- Koliko znaša verjetnost, da ima naključni posameznik bolezen, če je rezultat testa zanj pozitiven?

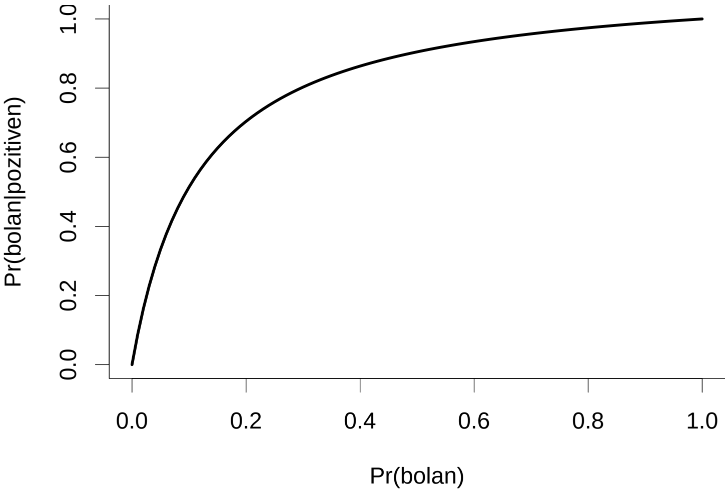
$$
\begin{aligned}
\Pr(bolan|pozitiven) &= \frac{\Pr(pozitiven|bolan) \times \Pr(bolan)}{\Pr(pozitiven)} \\
&\frac{\Pr(pozitiven|bolan) \times \Pr(bolan)}{\Pr(pozitiven|bolan) \times \Pr(bolan) + \Pr(pozitiven|zdrav) \times \Pr(zdrav)} \\
&= \frac{0.95 \times 0.008}{0.95 \times 0.008 + 0.1 \times 0.992} = \frac{0.0076}{0.1068} = 0.071
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pr(zdrav|pozitiven) &= \frac{\Pr(pozitiven|zdrav) \times \Pr(zdrav)}{\Pr(pozitiven)} \\
&\frac{\Pr(pozitiven|zdrav) \times \Pr(zdrav)}{\Pr(pozitiven|bolan) \times \Pr(bolan) + \Pr(pozitiven|zdrav) \times \Pr(zdrav)} \\
&= \frac{0.10 \times 0.992}{0.95 \times 0.008 + 0.1 \times 0.992} = \frac{0.0992}{0.1068} = 0.929
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pr(bolan|pozitiven) + \Pr(zdrav|pozitiven) &= 0.071 + 0.929 = 1 \\
\Pr(pozitiven) &= 0.0076 + 0.0992 = 0.1068
\end{aligned}
$$

Vaja (rešitev) III

- Kakšen je vpliv predhodne (apriorne) informacije?



Vaja (rešitev) IV

- Koliko znaša verjetnost, da ima naključni posameznik bolezen, če je rezultat ponovljenega testa zanj pozitiven?

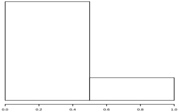
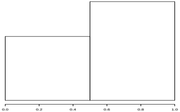
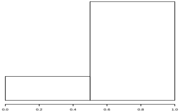
$$
\begin{aligned}
\Pr(bolan|pozitiven) &= 0.071 \Longrightarrow \Pr(bolan) \\
\Pr(bolan|2x\ pozitiven) &\Longrightarrow \Pr(bolan|pozitiven) \\
\Pr(bolan|pozitiven) &= \frac{\Pr(pozitiven|bolan) \times \Pr(bolan)}{\Pr(pozitiven)} \\
&\frac{\Pr(pozitiven|bolan) \times \Pr(bolan)}{\Pr(pozitiven|bolan) \times \Pr(bolan) + \Pr(pozitiven|zdrav) \times \Pr(zdra}\\
&= \frac{0.95 \times 0.071}{0.95 \times 0.071 + 0.1 \times 0.929} = \frac{0.06745}{0.16035} = 0.421
\end{aligned}
$$

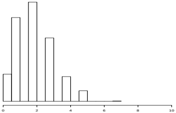
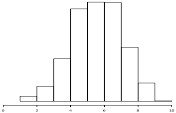
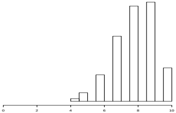
Porazdelitve

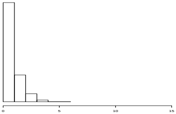
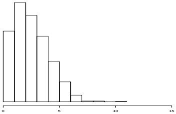
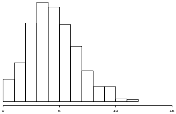
Prikaz nekaj pogosto uporabljenih porazdelitev v statistiki in njihovih lastnosti

Porazdelitve - diskretne

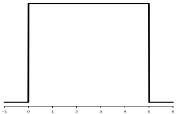
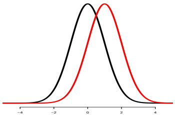
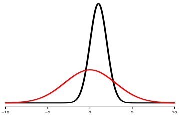
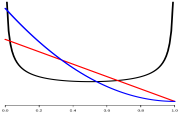
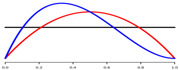
Porazdelitev	Zapis	$\Pr(x)$	$E(x)$	$Var(x)$
Bernoullijeva	$B(1,\theta)$	$\theta^x (1-\theta)^{1-x}$	θ	$\theta(1-\theta)$
Binomska	$B(n,\theta)$	$\binom{n}{x}\theta^x (1-\theta)^{n-x}$	$n\theta$	$n\theta(1-\theta)$
Poissonova	$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!}$	λ	λ

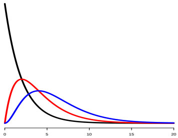
Porazdelitve - zvezne

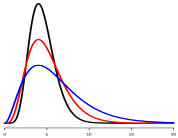
Porazdelitev	Zapis	$p(x)$	$E(x)$	$Var(x)$
Enakomerna	$U(\alpha,\beta)$	$\frac{1}{\beta-\alpha}$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$
				
Gaussova	$N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	σ^2
				
Beta[1]	$Be(\alpha,\beta)$	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$
				

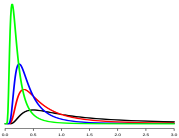
[1] $\Gamma(x)$ = gama funkcija

Porazdelitve - zvezne II

Porazdelitev	Zapis	$p(x)$	$E(x)$	$Var(x)$
Gama[2]	$G(\alpha, \beta)$	$\beta^{\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)$	α/β	α/β^2
	$G(\alpha, \theta = 1/\beta)$	$\frac{1}{\theta^{\alpha}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)$	$\alpha\theta$	$\alpha\theta^2$
Inverzna gama	$IG(\alpha, \beta)$	$\beta^{\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x)^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{\beta}{x}\right)$	$\frac{\beta}{\alpha-1}$	$\frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$







[2] $\Gamma(x)$ = gama funkcija

Vaja

Razložimo gostoto verjetnosti za binomsko porazdelitev:

$$\Pr(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

Vaja (rešitev)

Gostota verjetnosti za Bernoullijevo porazdelitev $B(1, \theta)$:

$$\Pr(x) = \theta^{x} (1 - \theta)^{1-x}$$

- zaloga vrednosti je $[0, 1]$
  (0=cifra ali 1=glava pri metu kovanca, 0=zdrav ali 1=bolan, ...)
- verjetnost, da se zgodi dogodek 1 je enaka: $\Pr(x = 1) = \theta$
  ($\theta = 1/2$ pri poštenem kovancu)
- splošni zapis (glej zgoraj):
  - $\Pr(x = 0) = \theta^{0} (1 - \theta)^{1-0} = 1 (1 - \theta)^{1} = 1 - \theta$
  - $\Pr(x = 1) = \theta^{1} (1 - \theta)^{1-1} = \theta^{1} (1 - \theta)^{0} = \theta$

Če spremljamo več zaporednih dogodkov iz $B(1, \theta)$ je število možnih kombinacij dogodkov enako $\binom{n}{x}$. Tako je gostota verjetnosti za binomsko porazdelitev $B(n, \theta)$:

$$\Pr(x) = \binom{n}{x} \theta^{x} (1 - \theta)^{n-x}$$

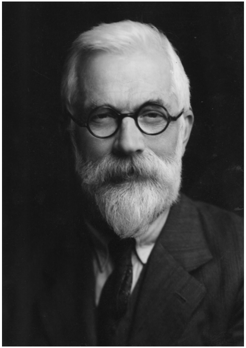
Vaja

- Uporabite spodnjo kodo

```
n <- 10; theta <- 0.5
## Verjetnost, da dobimo x=1, x=5 ali x=9?
x <- c(1, 5, 9)
choose(n, x)*theta^x*(1-theta)^(n-x)

## Vzorčimo vrednosti iz Binomske porazdelitve
x <- rbinom(n=100, size=n, prob=theta)

## Pregled vzorca
table(x); hist(x)

## Izračun povprečja in variance
n*theta; n*theta*(1-theta)  ## pričakovano
mean(x); var(x)             ## opaženo
```

- Povečajte vzorec s 100 na 100.000 in ponovite. Kaj opazite?

2. Verjetje (ang. likelihood)



Primer

Obiščemo 7 neodvisnih lokacij in opravimo po 5 neodvisnih zanesljivih testov za določitev obolelosti. Rezultati so:

Lokacija	1	2	3	4	5	6	7	Skupaj
Št. pozitivnih	2	0	1	1	1	1	2	8

- Koliko znaša delež obolelih v populaciji?
  - Število pozitivnih testov na lokaciji i: y_i (poznamo)
  - Delež obolelih: θ (ne poznamo)
  - Predpostavljeni model: $\Pr(y_i|n=5,\theta) \sim B(5,\theta)$
  - Princip verjetja (Fisher): "**Poiščimo takšno vrednost parametrov** (θ), **da bodo zbrani podatki** ($\mathbf{y}$), **kar se da najbolj verjetni.**"
  - Gostota verjetnosti $\Pr(\mathbf{y}|n=5,\theta)$ in verjetje $L(\mathbf{y}|n=5,\theta)$:

$$\Pr(\mathbf{y}|n=5,\theta) = \prod_{i=1}^{7} \binom{n}{y_i} \theta^{y_i} (1-\theta)^{n-y_i} \qquad L(\mathbf{y}|n=5,\theta) = \prod_{i=1}^{7} \binom{n}{y_i} \theta^{y_i} (1-\theta)^{n-y_i}$$

Primer II

Iščemo vrednost parametra (θ), da bodo zbrani podatki ($\mathbf{y}$), kar se da najbolj verjetni. –> Poiskati moramo maksimum funkcije $L(y|n,\theta)$. Standarden postopek:

1. "Računalniki ne marajo zelo majhnih števil"
   $\log(L(y|n,\theta)) = l(y|n,\theta)$
2. "Zmasiramo" izraz $l(y|n,\theta)$
3. Odvajamo in odvod enačimo z nič
4. Rešimo enačbo –> izračunamo oceno parametra $\left(\hat{\theta}_{MLE}\right)$ (direktno ali z numeričnimi metodami)
5. Varianco ocene izračunamo na osnovi informacijske matrike $\left(Var\left(\hat{\theta}_{MLE}\right) = \left(-E\left(\frac{\partial^2 \log(L(y|n,\theta))}{\partial\theta\partial\theta'}\right)\right)^{-1}\right)$

MLE = ang. Maximum Likelihood Estimate, slo. cenilka po metodi največjega verjetja

Primer II

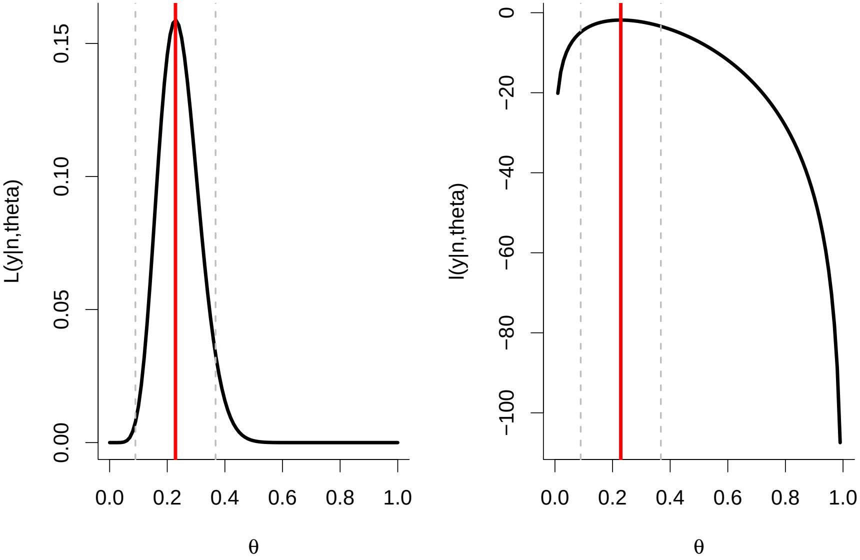
Ocena deleža obolelih glede na zbrane podatke:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{MLE} &= \frac{y}{n} \\ &= \frac{8}{35} = 0.23\end{aligned}$$

Standardna napaka ocene:

$$\begin{aligned}SE\left(\hat{\theta}_{MLE}\right) &= \sqrt{\frac{-1}{-\frac{y}{p^2} - \frac{n-y}{(1-p)^2}}} \\ &= \sqrt{\frac{-1}{-\frac{8}{0.23^2} - \frac{35-8}{(1-0.23)^2}}} = 0.07\end{aligned}$$

Primer III



L(y|n,theta)
0.00
0.05
0.10
0.15
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
θ
l(y|n,theta)
0
−20
−40
−60
−80
−100
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
θ

Vaja

- Uporabite spodnjo kodo

```
n <- 35
y <- 8
p <- seq(from=0, to=1, by=0.01)
MLE <- y/n
MLE_SE <- sqrt(-1 / (-y/MLE^2 - (n-y)/(1-MLE)^2))
MLE_CI <- MLE + c(-1.96, 0, 1.96) * MLE_SE
L <- choose(n, y)*p^y*(1-p)^(n-y)
l <- log(L)
par(mfrow=c(1, 2))
plot(L ~ p, type="l"); abline(v=MLE_CI)
plot(l ~ p, type="l"); abline(v=MLE_CI)
```

- Kaj se spremeni, če imamo vzorec velikosti 10 in 2 pozitivna rezultata ali vzorec velikosti 1000 in 230 pozitivnih rezultatov?

3. Bayesovski pristop k statistiki

Bayesov teorem

- Koliko znaša delež obolelih v populaciji?
  - Število vseh in pozitivnih testov: $n = 35, y = 8$ (poznamo)
  - Delež obolelih: θ (ne poznamo)

$$
\begin{aligned}
p(\theta|y,n) &= \frac{p(y|n,\theta) \times p(\theta)}{p(y)} \\
&= \frac{p(y|n,\theta) \times p(\theta)}{\int_\theta p(y|n,\theta) \times p(\theta)} \\
p(\theta|y,n) &\propto p(y|n,\theta) \times p(\theta)
\end{aligned}
$$

"posterior is proportional to likelihood times prior"

- Slovar:
  - $p(\theta|y,n)$ = posteriorna porazdelitev (rezultat)
  - $p(y|n,\theta)$ = verjetje (predpostavljen model + podatki)
  - $p(\theta)$ = apriorna porazdelitev (predpostavka = predhodno znanje)

Tip porazdelitve?

- Koliko znaša delež obolelih v populaciji?
  - Število vseh in pozitivnih testov: $n = 35, y = 8$ (poznamo)
  - Delež obolelih: θ (ne poznamo)

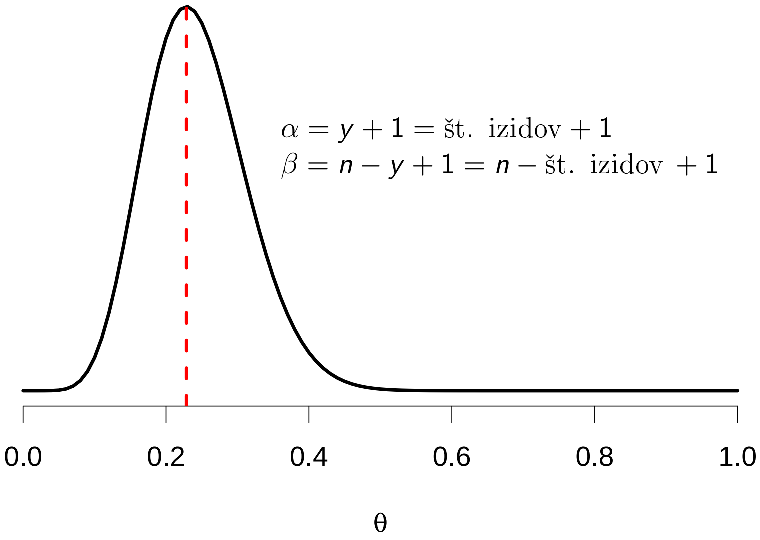
$$
\begin{aligned}
p(\theta|y,n) &\propto p(y|n,\theta) \times p(\theta) \\
&\propto \binom{n}{y} \theta^{y} (1-\theta)^{n-y} \times p(\theta) \\
&\propto \theta^{y} (1-\theta)^{n-y} \times p(\theta)
\end{aligned}
$$

"after the inspection beta distribution can be recognized"

$$
x \sim Be(\alpha,\beta) \qquad p(x|\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}
$$

$$
p(y|n,\theta) = Be(y+1, n-y+1)
$$

Tip porazdelitve $Be\left(y+1, n-y+1\right)$



Konjugirana apriorna porazdelitev

- Konjugirana apriorna porazdelitev ima enako "obliko" kot verjetje:

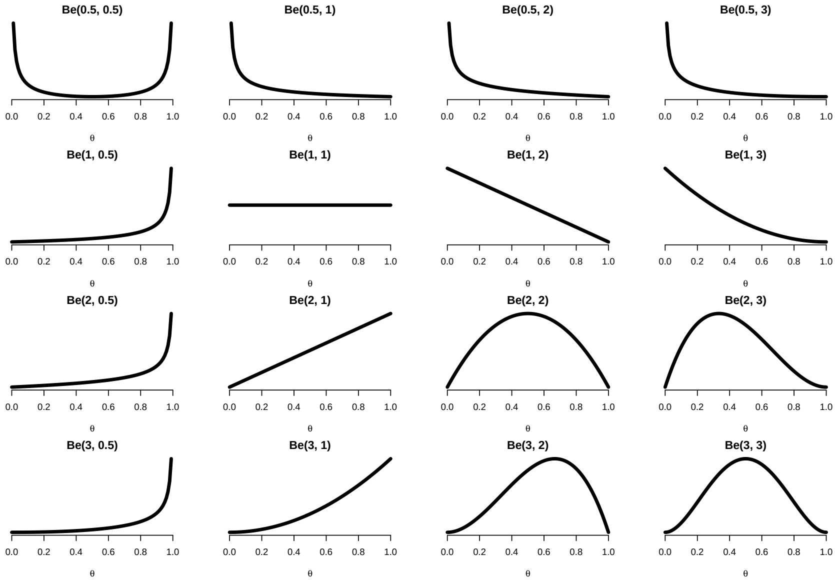
$$
\begin{aligned}
p(y|n,\theta) &= Be(y+1, n-y+1) \\
p(\theta) &= Be(\alpha, \beta) \\
p(\theta|y,n) &\propto \theta^{y}(1-\theta)^{n-y} \times \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} \\
&\propto \theta^{y+\alpha-1}(1-\theta)^{n-y+\beta-1}
\end{aligned}
$$

"after the inspection <u>beta distribution</u> can be recognized"

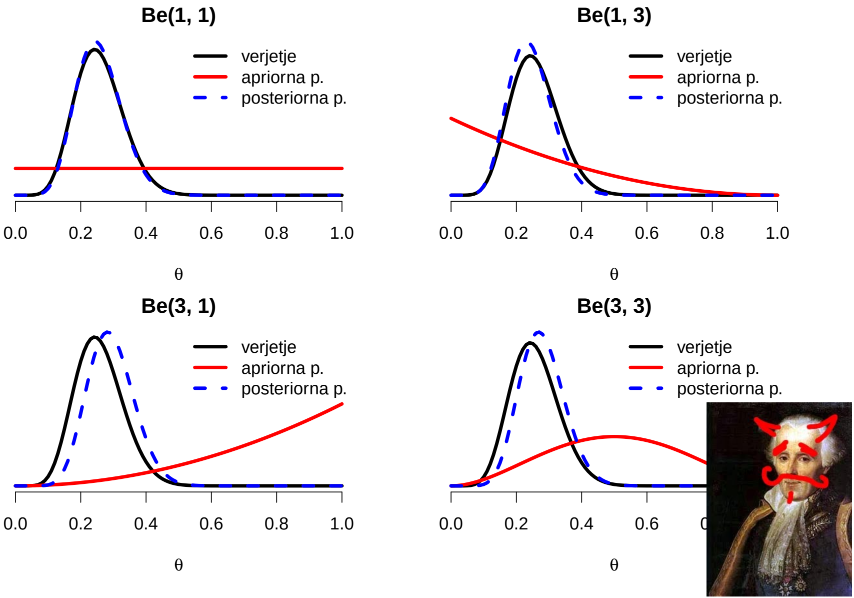
$$
p(\theta|y,n) = Be(y+1+\alpha, n-y+1+\beta)
$$

Moramo določiti parametra apriorne porazdelitve: α, β

Apriorna porazdelitev $Be(\alpha, \beta)$



Posteriorna porazdelitev $Be\left(y+1+\alpha, n-y+1+\beta\right)$



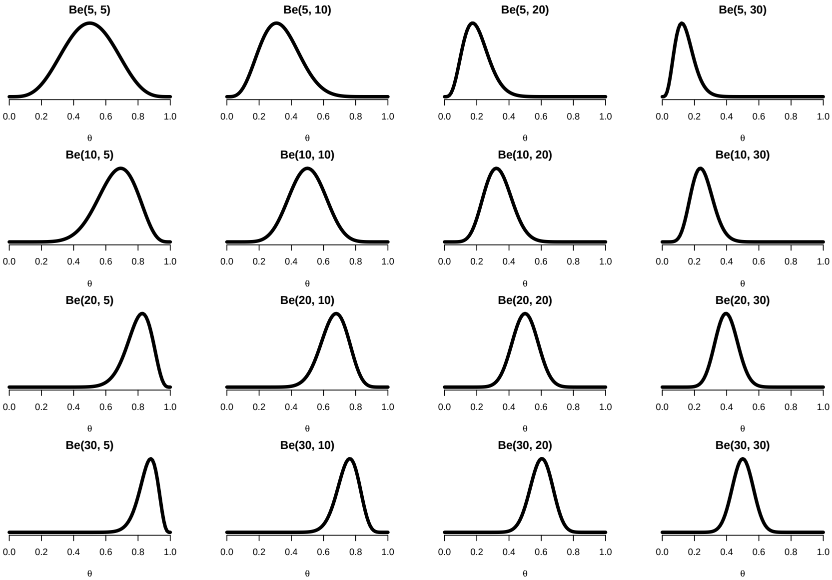
Posteriorna porazdelitev $Be\left(y+1+\alpha, n-y+1+\beta\right)$

$$E\left(x|\alpha,\beta\right)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad Var\left(x|\alpha,\beta\right)=\frac{\alpha\beta}{\left(\alpha+\beta\right)^2\left(\alpha+\beta+1\right)}$$

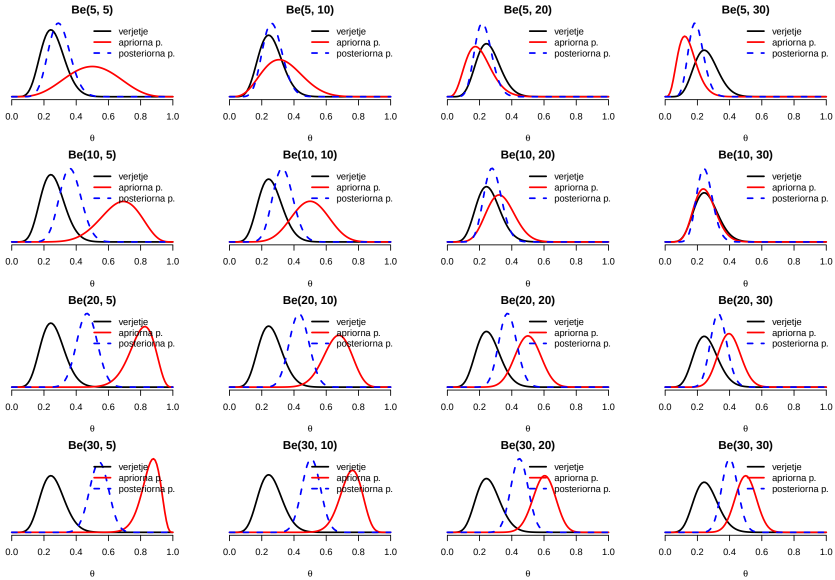
Apriorna p.	$E\left(\theta|y,n,\alpha,\beta\right)$	$SE\left(\theta|y,n,\alpha,\beta\right)$
$Be\left(1,1\right)$	0.256	0.069
$Be\left(1,3\right)$	0.243	0.066
$Be\left(3,1\right)$	0.293	0.070
$Be\left(3,3\right)$	0.279	0.068

$$\hat{\theta}_{MLE}=0.23, \quad SE\left(\hat{\theta}_{MLE}\right)=0.07$$

Apriorna porazdelitev $Be(\alpha, \beta)$



Posteriorna porazdelitev $Be\left(y+1+\alpha, n-y+1+\beta\right)$



Vaja

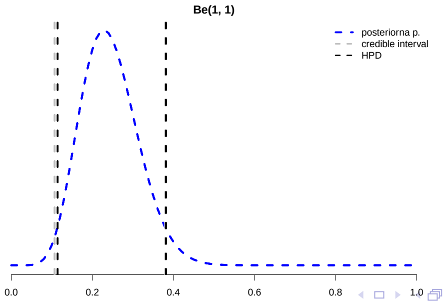
- S pomočjo spodnje kode izračunajte in narišite posteriorno porazdelitev za sledeče primere:
  - vzorec velikosti 10 in 2 pozitivna rezultata
  - vzorec velikosti 1000 in 230 pozitivnih rezultatov?

```
n <- 35; y <- 8
alpha <- 1; beta <- 10
a <- y + alpha; b <- n - y + beta
MLE <- y/n
MLE_SE <- sqrt(-1 / (-y/MLE^2 - (n-y)/(1-MLE)^2))
POS <- a / (a + b)
POS_SE <- sqrt(a * b / (((a + b)^2) * (a + b + 1)))
p <- seq(from=0, to=1, by=0.01)
dL   <- dbeta(x=p, shape1=y+1,   shape2=n-y+1)
dPRI <- dbeta(x=p, shape1=alpha, shape2=beta)
dPOS <- dbeta(x=p, shape1=a,     shape2=b)
matplot(y=cbind(dL, dPRI, dPOS), x=p, type="l",
        col=c("black", "red", "blue"))
abline(v=MLE)
```

Intervali

- Credible interval (analogija intervala zaupanja)
  - v primeru, da poznamo posteriorno porazdelitev lahko enostavno izračunamo kvantile
  - kot približek lahko vzamemo interval, ki je simetričen okoli povprečja porazdelitve (predpostavljamo, da je posteriorna porazdelitev normalna)
- Highest Posterior Density (HPD) (interval, ki je čim krajši in zajema določen % porazdelitve!)

$$CI\,(\theta|y,n,\alpha,\beta) = 0.11 - 0.38, \quad HPD\,(\theta|y,n,\alpha,\beta) = 0.14 - 0.41$$



Vaja II

- S pomočjo spodnje kode vzorčite iz izračunanih posteriornih porazdelitev in izračunajte:
  - povprečje
  - standardni odklon
  - credible interval
  - highest posterior density

```
n <- 35; y <- 8
alpha <- 1; beta <- 1
a <- y + 1 + alpha; b <- n - y + 1 + beta
x <- rbeta(n=100000, shape1=a, shape2=b)
hist(x)
mean(x)
sd(x)
mean(x) + c(-1, 1)*1.96*sd(x)
library(package="coda")
HPDinterval(as.mcmc(x))
```

Apriorna porazdelitev

"Tisti, ki uporablja Bayesovsko statistiko, na podlagi nejasnega/meglenega pričakovanja konja in bežnega pogleda na osla, trdno sklepa, da je videl mulo." Senn (1997)

- Neinformativna apriorna p. ne obstaja. Celo enakomerna apriorna porazdelitev pravi, da so vse vrednosti enako verjetne.
- Ni vse tako "črno", saj obstajajo pristopi za izpeljavo t.i. neinformativnih apriornih porazdelitev
  - Jefrreys-ove apriorne porazdelitve
  - referenčne apriorne porazdelitve (Bernardo)
  - ...
- Analiza občutljivosti
- Uporaba smiselne apriorne informacije vodi do pristranih (ang. biased) ocen, ki pa imajo manjšo varianco (kombinacija dveh virov informacije –> zmanjšana varianca)
- Prednost dajemo konjugiranim apriornim p., ki so podobne oblike kot posteriorna p.
- S povečevanjem števila podatkov se vpliv apriorne p. zmanjšuje

“Splošna” apriorna porazdelitev

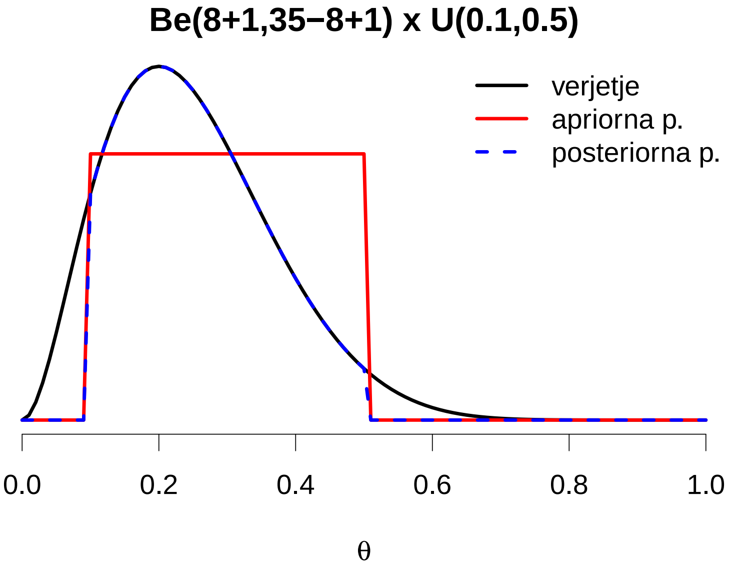
- Za apriorno porazdelitev lahko načeloma izberemo poljubni tip porazdelitve:

$$
\begin{aligned}
p\left(y|n,\theta\right) &= Be\left(y+1,n-y+1\right)\\
p\left(\theta\right) &= U\left(\alpha,\beta\right)\\
p\left(\theta|y,n\right) &\propto \theta^{y}\left(1-\theta\right)^{n-y}\times\frac{1}{\beta-\alpha}\\
&\propto \int_{\alpha}^{\beta} Be\left(y+1,n-y+1\right)\frac{1}{\beta-\alpha}d\theta\\
&\propto ????
\end{aligned}
$$

“after the inspection <u>no standard distribution</u> can be recognized”

Ne moremo direktno izračunati (včasih možno ampak bolj poredko). Potreben drugačen pristop!

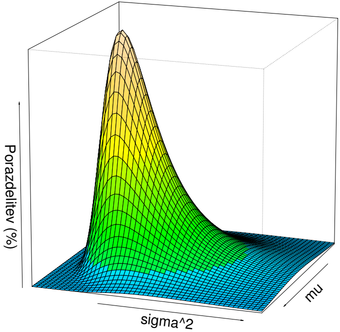
“Splošna” apriorna porazdelitev - enakomerna



Večje število parametrov?

- Statistični modeli imajo običajno več kot en parameter
- Npr. Gaussova porazdelitev

$$
\begin{aligned}
p\left(y|\mu,\sigma^2\right) &= N\left(\mu,\sigma^2\right) \\
p\left(\mu\right) &= N\left(\ldots\right) \\
p\left(\sigma^2\right) &= IG\left(\ldots\right) \\
p\left(\mu,\sigma^2|y\right) &\propto p\left(y|\mu,\sigma^2\right) p\left(\mu\right) p\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

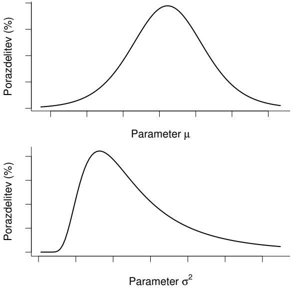


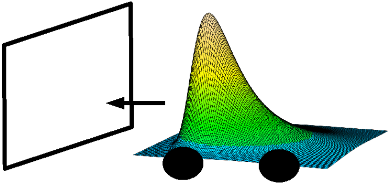
Ampak mi bi radi kot rezultat robne (enodimenzionalne) posteriorne porazdelitve: $p\left(\mu|y\right)$ in $p\left(\sigma^2|y\right)$

Večje število parametrov?

Ampak mi bi radi kot rezultat robne (enodimenzionalne) posteriorne porazdelitve!

$$p(\mu|y) = \int_0^{\infty} p(\mu,\sigma^2|y)\, d\sigma^2 \qquad p(\sigma^2|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\mu,\sigma^2|y)\, d\mu$$





Še večje število parametrov?

$$
\begin{aligned}
p(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p | y) &\propto p(y | \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)\, p(\theta_1)\, p(\theta_2) \ldots p(\theta_p) \\
p(\theta_1 | y) &= \int_{\theta_2} \int_{\ldots} \int_{\theta_p} p(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p | y)\, d\theta_2 d \ldots d\theta_p \\
p(\theta_2 | y) &= \int_{\theta_1} \int_{\ldots} \int_{\theta_p} p(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p | y)\, d\theta_1 d \ldots d\theta_p \\
\ldots \\
\boldsymbol{\theta} &= \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p \\
p(\theta_i | y) &= \int_{\boldsymbol{\theta}_{-i}} p(\boldsymbol{\theta} | y)\, d\boldsymbol{\theta}_{-i}
\end{aligned}
$$

Običajno analitično nerešljivo!!!

4. Metode MCMC

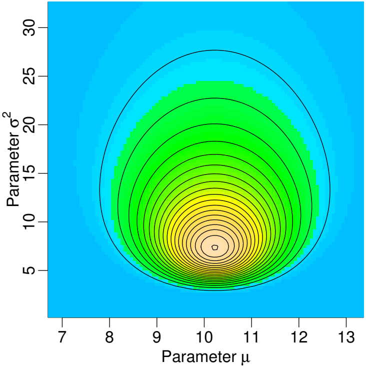
MCMC

- MCMC
  - ang. Monte Carlo Markov Chain
  - slo. Monte Carlo z Markovskimi verigami
- Monte Carlo - stohastična metoda za rešitev računsko/analitično zahtevnih primerov
- Markovske verige - sedanja vrednost parametra je odvisna le od predhodne vrednosti
- U okviru Bayesovske statistike uporabljamo metodo MCMC za vzorčenje iz (pogojnih) posteriornih porazdelitev
- Številni algoritmi
  - Metropolis sampling
  - Metropolis-Hastings sampling
  - Gibbs sampling
  - ...

Večje število parametrov?

- Statistični modeli imajo običajno več kot en parameter
- Npr. Gaussova porazdelitev

$$
\begin{aligned}
p\left(y|\mu,\sigma^2\right) &= N\left(\mu,\sigma^2\right) \\
p\left(\mu\right) &= N\left(\ldots\right) \\
p\left(\sigma^2\right) &= IG\left(\ldots\right) \\
p\left(\mu,\sigma^2|y\right) &\propto p\left(y|\mu,\sigma^2\right) p\left(\mu\right) p\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$



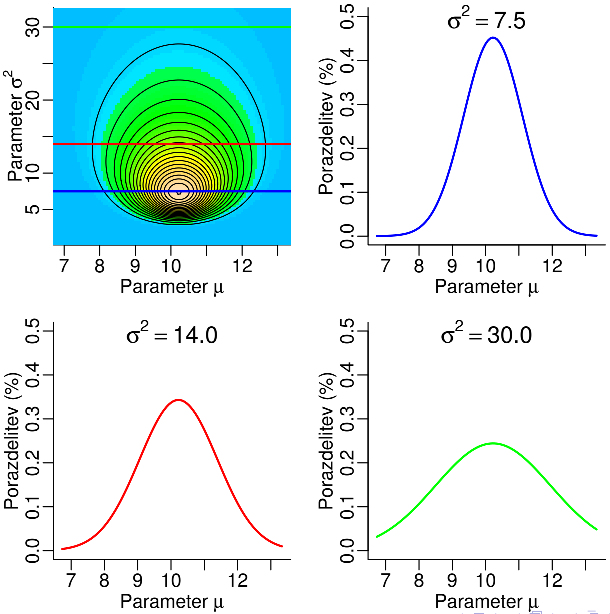
Ampak mi bi radi kot rezultat robne (enodimenzionalne) posteriorne porazdelitve: $p\left(\mu|y\right)$ in $p\left(\sigma^2|y\right)$

MCMC - pogojne porazdelitve

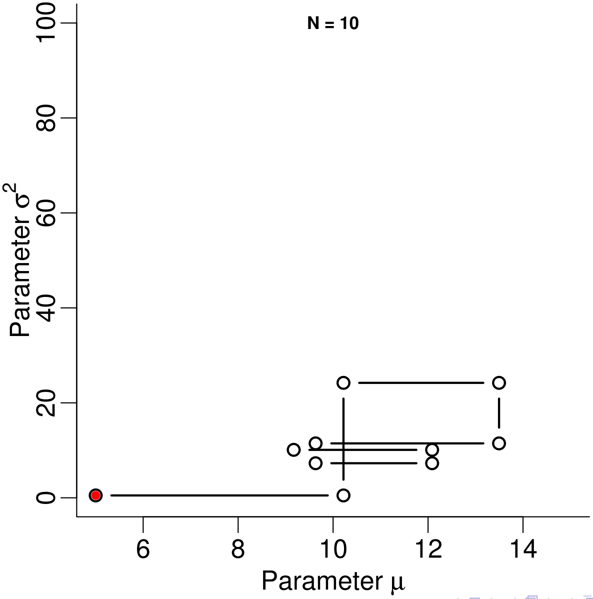
- Izpeljemo pogojne porazdelitve za vsak parameter posebej (lahko tudi za skupine/bloke parametrov skupaj)
- Iz enodimenzionalnih pogojnih porazdelitev je enostavno vzorčiti
- Pogojne porazdelitve za Gaussov model:

$$\begin{aligned}
p\left(\mu,\sigma^2|y\right) &\propto p\left(y|\mu,\sigma^2\right) p\left(\mu\right) p\left(\sigma^2\right) \\
p\left(\mu|y,\sigma^2\right) &\propto p\left(y|\mu,\sigma^2\right) p\left(\mu\right) \cancel{p\left(\sigma^2\right)} \\
p\left(\sigma^2|y,\mu\right) &\propto p\left(y|\mu,\sigma^2\right) \cancel{p\left(\mu\right)} p\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}$$

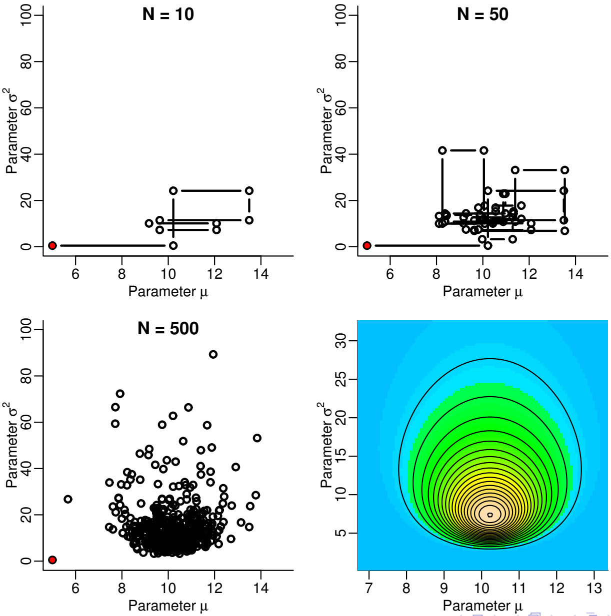
MCMC - pogojne porazdelitve (prikaz)



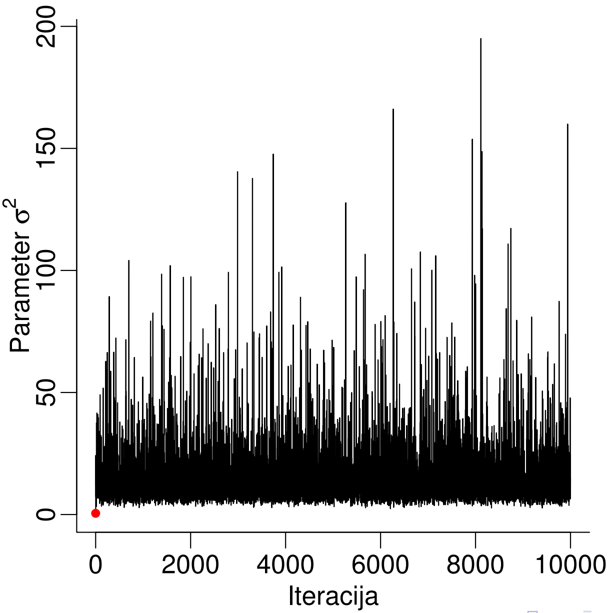
MCMC - vzorčenje



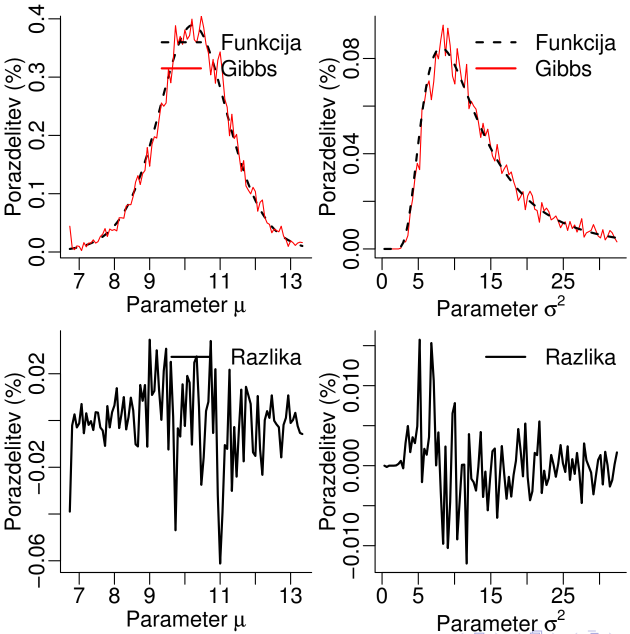
MCMC - vzorčenje II



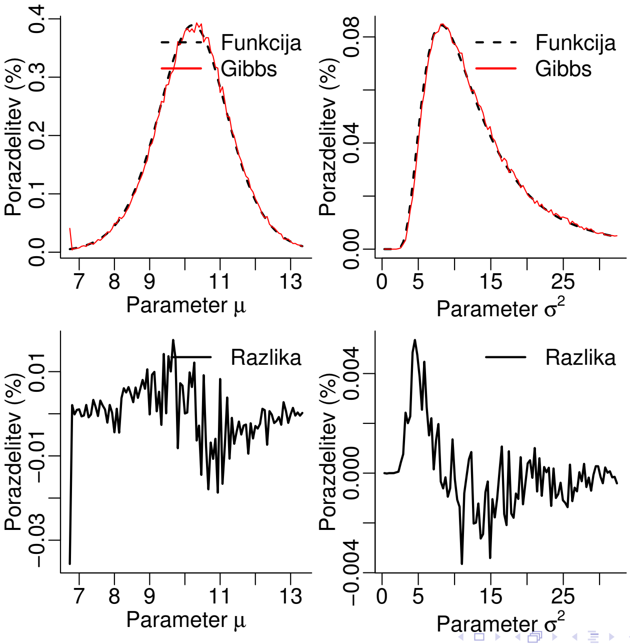
MCMC - Markovska veriga



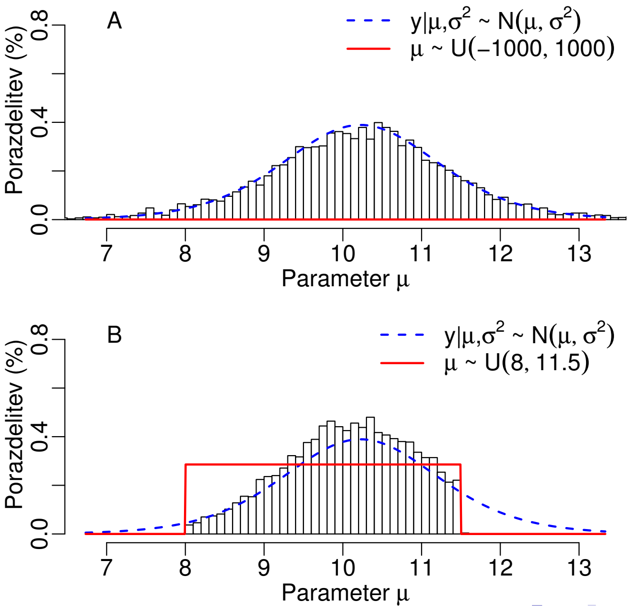
MCMC - robne porazdelitve



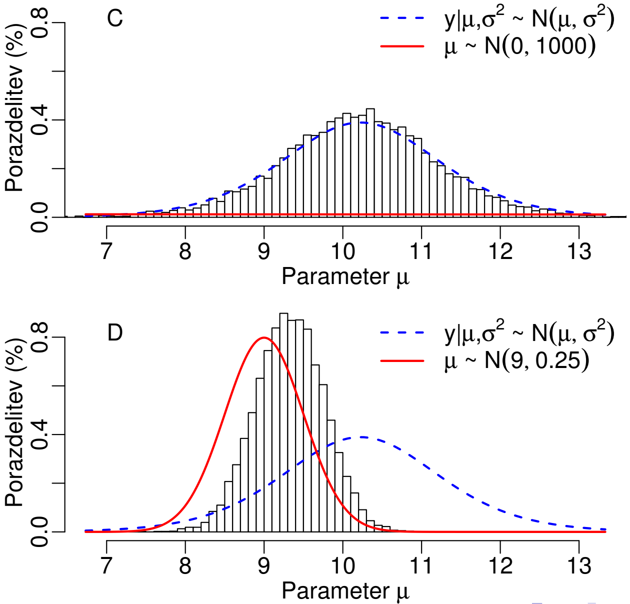
MCMC - robne porazdelitve II



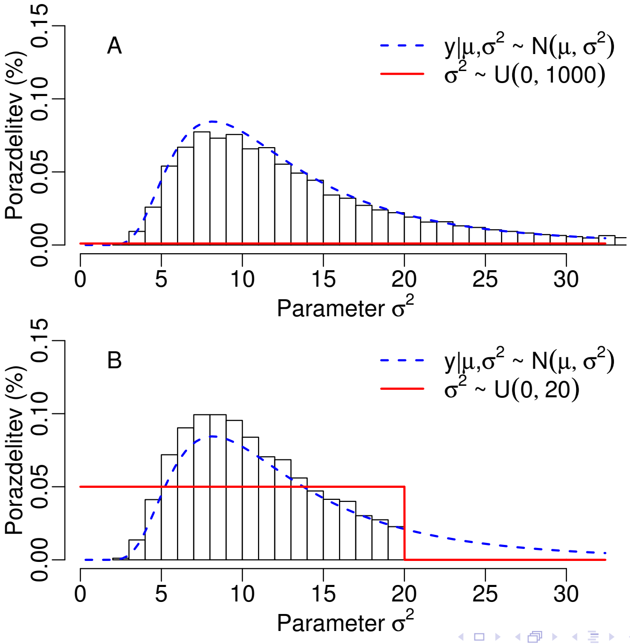
MCMC - različne apriorne p. za μ



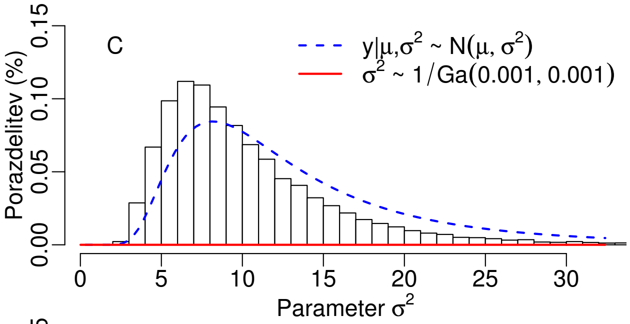
MCMC - različne apriorne p. μ II

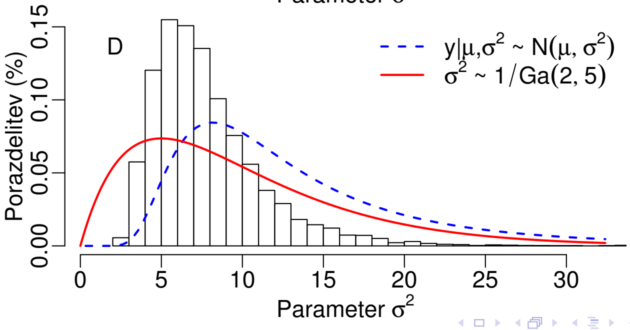


MCMC - različne apriorne p. σ^2



MCMC - različne apriorne p. σ^2 II

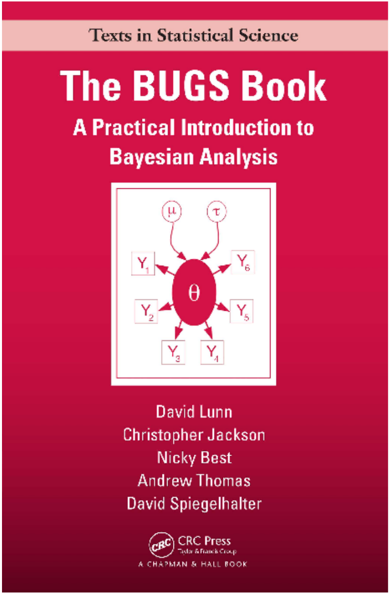




Splošni MCMC programi

- BUGS - samostojno (BUGS, WinBUGS in OpenBUGS) in preko R paketov (R2OpenBUGS, BRugs)
- JAGS - samostojno in preko R paketov (jags in rjags)
- BayesX - samostojno in preko R paketa BayesX
- R paketi
  `http://cran.r-project.org/web/views/Bayesian.html`
  - MCMCglmm
  - ...

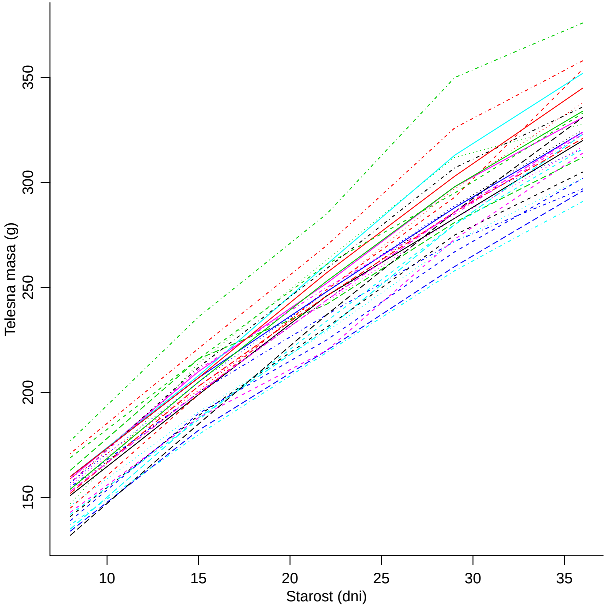
BUGS


Texts in Statistical Science
The BUGS Book
A Practical Introduction to
Bayesian Analysis
David Lunn
Christopher Jackson
Nicky Best
Andrew Thomas
David Spiegelhalter
CRC Press
A CHAPMAN & HALL BOOK

OpenBUGS

- OpenBUGS
  - http://www.openbugs.info
  - namestite si program (Downloads ...)
- Video "Welcome to WinBUGS - the movie!"
  http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/winbugs/winbugsthemovie.html
  - prepišite model, podatke in začetne vrednosti in ponovite celoten postopek
  - narišimo DAG za model
  - simulirajmo meritve na osnovi modela in izbranih vrednosti parametrov ($\mu = 175, \sigma = 10$)
- Med primeri (Examples –> Examples Vol I) odprite primer "Rats" (rast mladih podgan)
  - preberite opis primera
  - preučite model
  - izvedite analizo
  - spremenite model tako, da boste lahko spremljali vrednosti za σ_a^2 in σ_β^2 ter σ_a in σ_β

Rast mladih podgan



R2OpenBUGS

- R2OpenBUGS - R paket za povezavo med programoma OpenBUGS in R
  - http://cran.r-project.org/web/packages/BRugs/index.html
- Namestite si paket in sledite spodnjim ukazom

```
install.packages(pkg="R2OpenBUGS")
library(package="R2OpenBUGS")
vignette("R2OpenBUGS")
?bugs # izvedite ukaze iz primera (“Schools example”)
```

BRugs

- BRugs - R paket za izvajanje ukazov programa OpenBUGS v R
  - http://cran.r-project.org/web/packages/BRugs/index.html
- Namestite si paket in sledite spodnjim ukazom

```
install.packages(pkg="BRugs")
library(package="Brugs")
?BRugs # izvedite ukaze iz primera (“Rats example”)
```